Truth and Falsity of Formulas
(公式的真假)

熊 明
mingshone@163.com

School of Politics and Administration
South China Normal University

主要内容

1. 再论联接词
2. 构造真值表
3. 重言式

主要内容

1. **再论联接词**
2. 构造真值表
3. 重言式

在数学中，在公式 x^2+2x+1 中代入一个数值，即可计算出一个数值。例如，$3^2+2\cdot 3+1=16$

在逻辑学中，在公式 $\neg(p\wedge q)$ 中代入一个“真值”，可算出一个“真值”。例如，“$\neg(\mathsf{T}\wedge\mathsf{T})=\mathsf{F}$”

真值

命题如果为真，可认为它取值为“真”；如果为假，可认为它取值为“假”。

- “真”常用 T（true）表示
- “假”常用 F（false）表示

二者被看做数值，统称为真值（truth value）

真值

命题如果为真，可认为它取值为“真”；如果为假，可认为它取值为“假”。

- “真”常用 T（true）表示
- “假”常用 F（false）表示

二者被看做数值，统称为真值（truth value）

并非……

A	$\neg A$
T	F
F	T

- “并非 A”为真，当且仅当“A”为假。

并非……

A	$\neg A$
T	F
F	T

- “并非 A” 为真，当且仅当 “A” 为假。

并非……

A	$\neg A$
T	F
F	T

- “并非 A” 为真，当且仅当 “A” 为假。

并非……

A	$\neg A$
T	F
F	T

- "并非 A" 为真，当且仅当 "A" 为假。

并非……

A	$\neg A$
T	F
F	T

- “并非 A”为真，当且仅当“A”为假。

并非……

A	$\neg A$
T	F
F	T

- “并非 A”为真，当且仅当“A”为假。

推荐视频：

☞ BBC: Joy of Logic

- 命题 A：（逻辑学家）甲喝珠江生啤
- 命题 B：（逻辑学家）乙喝珠江生啤
- 命题 C：（逻辑学家）丙喝珠江生啤
- 命题“$A \wedge B \wedge C$”：甲、乙、丙都喝珠江生啤

“甲、乙、丙都喝珠江生啤”为真，当且仅当“甲喝珠江生啤”为真，“乙喝珠江生啤”为真，“丙喝珠江生啤”为真

$A \wedge B \wedge C$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T，C 为 T。

- 命题 A：（逻辑学家）甲喝珠江生啤
- 命题 B：（逻辑学家）乙喝珠江生啤
- 命题 C：（逻辑学家）丙喝珠江生啤
- 命题 “$A \wedge B \wedge C$”：甲、乙、丙都喝珠江生啤

“甲、乙、丙都喝珠江生啤”为真，当且仅当“甲喝珠江生啤”为真，“乙喝珠江生啤”为真，“丙喝珠江生啤”为真

$A \wedge B \wedge C$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T，C 为 T。

- 命题 A：（逻辑学家）甲喝珠江生啤
- 命题 B：（逻辑学家）乙喝珠江生啤
- 命题 C：（逻辑学家）丙喝珠江生啤
- 命题“$A \wedge B \wedge C$”：甲、乙、丙都喝珠江生啤

“甲、乙、丙都喝珠江生啤”为真，当且仅当“甲喝珠江生啤”为真，“乙喝珠江生啤”为真，“丙喝珠江生啤”为真

$A \wedge B \wedge C$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T，C 为 T。

- 命题 A：（逻辑学家）甲喝珠江生啤
- 命题 B：（逻辑学家）乙喝珠江生啤
- 命题 C：（逻辑学家）丙喝珠江生啤
- 命题 “$A \wedge B \wedge C$”：甲、乙、丙都喝珠江生啤

“甲、乙、丙都喝珠江生啤”为真，当且仅当“甲喝珠江生啤”为真，“乙喝珠江生啤”为真，“丙喝珠江生啤”为真

$A \wedge B \wedge C$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T，C 为 T。

……并且……

$A \wedge B$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T。

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

……并且……

$A \wedge B$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T。

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

……并且……

$A \wedge B$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T。

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

……并且……

$A \wedge B$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T。

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

……并且……

$A \wedge B$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T。

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

……并且……

$A \wedge B$ 为 T，当且仅当 A 为 T，B 为 T。

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

游戏时间

……或者……

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- “A 或者 B”为假，当且仅当“A”和“B”都为假。

……或者……

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- “A 或者 B” 为假，当且仅当 “A” 和 “B” 都为假。

……或者……

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- “A 或者 B” 为假，当且仅当 “A” 和 “B” 都为假。

……或者……

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- “A 或者 B” 为假，当且仅当 “A” 和 “B” 都为假。

……或者……

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- “A 或者 B”为假，当且仅当“A”和“B”都为假。

……或者……

A	B	$A \vee B$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- “A 或者 B” 为假，当且仅当 “A” 和 “B” 都为假。

如果……，那么……

条件命题“如果 A，那么 B”：$A \to B$

A	B	$A \to B$
T	T	?
T	F	?
F	T	?
F	F	?

讨论题

有四张卡片，每一张的一面写有一个英文字母，另一面写有一个数字。关于这四张卡片有如下一个命题：

如果一张卡片的一面是元音字母，那么它的另一面就是偶数。

E	K	4	7

问：为了验证这个命题是否为真，我们必须翻看这四张卡片中哪一张或哪些张？

讨论题

有四张卡片，每一张的一面写有一个英文字母，另一面写有一个数字。关于这四张卡片有如下一个命题：

如果一张卡片的一面是元音字母，那么它的另一面就是偶数。

E	K	4	7

问：为了验证这个命题是否为真，我们必须翻看这四张卡片中哪一张或哪些张？

可能的答案

E
7
K
E 和 7
E 和 4
K 和 7
全部卡片

历史渊源

1966 年，英国认知心理学家沃森（Peter Wason）设计了上述问题，并用它研究推理的心理机制。这个问题作为心理实验用于测试人的推理能力，该实验现称为“沃森选择任务”（Wason selection task）。

文献出处:

Wason, P. C. (1966). ”Reasoning”. In Foss, B. M.. *New horizons in psychology*. Harmondsworth: Penguin.

思想实验

考虑

例子

“对任何自然数 n，如果 n 小于 2，那么 n 小于 4”，

这是一个真命题。因而，这个命题的特例

- “如果 1 小于 2，那么 1 小于 4”（n 等于 1 时）
- “如果 3 小于 2，那么 3 小于 4”（n 等于 3 时）
- “如果 5 小于 2，那么 5 小于 4”（n 等于 5 时）

都为真。

思想实验

考虑

例子

“对任何自然数 n，如果 n 小于 2，那么 n 小于 4”，

这是一个真命题。因而，这个命题的特例

- “如果 1 小于 2，那么 1 小于 4”（n 等于 1 时）
- “如果 3 小于 2，那么 3 小于 4”（n 等于 3 时）
- “如果 5 小于 2，那么 5 小于 4”（n 等于 5 时）

都为真。

实质蕴涵

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- “如果 A，那么 B”为假，当且仅当“A”为真，并且“B”为假。

以上对“如果……，那么……”的解释称为“实质蕴涵”（material implication）。

实质蕴涵

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

- “如果 A，那么 B”为假，当且仅当“A”为真，并且“B”为假。

以上对“如果……，那么……”的解释称为“实质蕴涵”（material implication）。

再思沃森选择任务

E	K	4	7

一组典型的测试结果：

E	50%
7	5%
K	5%
E 和 7	0%
E 和 4	20%
K 和 7	15%
全部卡片	5%

正确答案

应选：E 和 7

实验结果的一种解释

人对于真值表没有“内在的”（built-in）理解机制，为了能正确地使用真值表，我们需要适当的训练。

Philo on Conditionals

a conditional is false when and only when its antecedent is true and its consequent false, and true in the three remaining cases: whenever the antecedent is false, and when both antecedent and consequent are true (Sextus Empiricus, Against the Logicians 2. 113-114).

Diodorus on Conditionals

a conditional proposition is true if it neither was nor is possible that its antecedent is true and its consequent false (Sextus Empiricus, Against the Logicians 2. 115-117).

主要内容

1. 再论联接词
2. 构造真值表
3. 重言式

代数公式的数值计算

x	y	$x^2 + x \cdot y$
0	0	0
1	2	3
$\sqrt{2}$	-4	$2 - 4\sqrt{2}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$

逻辑公式的真值计算

p_1	p_2	$(p_1 \vee \neg p_2) \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

真值计算规则

<table>
<tr><th>A</th><th>B</th><th>$\neg A$</th><th>$A \vee B$</th><th>$A \wedge B$</th><th>$A \to B$</th></tr>
<tr><td>T</td><td>T</td><td rowspan="2">F</td><td>T</td><td>T</td><td>T</td></tr>
<tr><td>T</td><td>F</td><td>T</td><td>F</td><td>F</td></tr>
<tr><td>F</td><td>T</td><td rowspan="2">T</td><td>T</td><td>F</td><td>T</td></tr>
<tr><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>F</td><td>T</td></tr>
</table>

例子

p_1	p_2	$\neg p_2$	$p_1 \vee \neg p_2$	$p_1 \wedge \neg p_2$	$(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

例子

p_1	p_2	$\neg p_2$	$p_1 \vee \neg p_2$	$p_1 \wedge \neg p_2$	$(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

例子

p_1	p_2	$\neg p_2$	$p_1 \vee \neg p_2$	$p_1 \wedge \neg p_2$	$(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

例子

p_1	p_2	$\neg p_2$	$p_1 \vee \neg p_2$	$p_1 \wedge \neg p_2$	$(p_1 \vee \neg p_2) \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

例子

p_1	p_2	$\neg p_2$	$p_1 \vee \neg p_2$	$p_1 \wedge \neg p_2$	$(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	F	T	F	F
T	F	T	T	T	T
F	T	F	F	F	T
F	F	T	T	F	F

真值表

上一表格直观地展示了公式

$$(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$$

在其中命题变元每种真值情况下相应的取值。习惯上称之为该公式的**真值表**（truth table）。

真值表

上一表格直观地展示了公式

$$(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$$

在其中命题变元每种真值情况下相应的取值。习惯上称之为该公式的**真值表**（truth table）。

真值表

上一表格直观地展示了公式

$$(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$$

在其中命题变元每种真值情况下相应的取值。习惯上称之为该公式的**真值表**（truth table）。

更复杂的真值表例子

p	q	r	$(p \vee q \to r) \to (p \to r) \wedge (q \to r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

补充逻辑符：等值

A	B	$(A \to B) \wedge (B \to A)$	$A \leftrightarrow B$
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	F	F
F	F	T	T

- “当且仅当 A，才 B”为真，当且仅当 A 与 B 同真同假。

主要内容

1. 再论联接词
2. 构造真值表
3. **重言式**

重言式

定义

- 一个公式，如果不论其中命题变元的取值如何，此公式取值都为真，那么此公式就是**重言式**，又称为**恒真式**。
- 一个公式，如果不论其中命题变元的取值如何，此公式取值都为假，那么此公式就是**矛盾式**，又称为**恒假式**。
- 一个公式，如果存在一种命题变元的取值情况，使得此公式取值为真，那么此公式就是**可满足式**。

例子

p_1	p_2	$(p_1 \vee \neg p_2) \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- $(p_1 \vee \neg p_2) \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$ 不是重言式。
- 它是可满足式。

例子

p_1	p_2	$(p_1 \vee \neg p_2) \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- $(p_1 \vee \neg p_2) \rightarrow (p_1 \wedge \neg p_2)$ 不是重言式。
- 它是可满足式。

例子

p_1	p_2	$(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	F

- $(p_1 \vee \neg p_2) \to (p_1 \wedge \neg p_2)$ 不是重言式。
- 它是可满足式。

例子

- $p \vee \neg p$
- $p \wedge \neg p$
- $(p \vee q \rightarrow r) \rightarrow (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow r)$

真值表产生器

- 可机械地对任何公式产生真值表，从而判定公式是否是重言式。

示例代码：$((p+q)>r)=(p>r)\&(q>r)$
定位到这里：Tree table Generator

网址为：
http://turner.faculty.swau.edu/mathematics/materialslibrary/truth/

Thanks for your attention!

Q & A