Propositions and Formulas

(命题与公式)

熊　明
mingshone@163.com

School of Politics and Administration
South China Normal University

主要内容

命题逻辑

- 在第一个模块中，我们将学习被称为**命题逻辑**的一个理论。
- 这个理论的基本特点是：有一些命题（简单命题、原子命题）被看做是简单的，或不可分的，其他的命题（复合命题、分子命题）都是简单命题按照到一定的方式组合起来的。
- 这个理论的基本问题是：复合命题的真假如何取决于其中简单命题的真假？相应地，有哪些推理形式是有效的？

简史

- 命题逻辑发端于公元前 3 世纪末的古希腊，这一个理论比亚里士多德的三段论理论晚一个世纪。
- 亚里士多德的学生泰奥弗拉斯托斯 (Theophrastus, 371 – 287 BC) 给出了“假言三段论”。
- Megarian 学派的狄奥多罗斯 (Diodorus Cronus, ???-284BC) 和他的学生菲罗 (Philo): 关于 if ... then ... 的争论。
- Stoic 学派的克律西波斯 (Chrysippus, roughly 280-205 BC) 及其门徒: 简单命题与复合命题的分类、汇集了很多有效的推理形式。

- If the first, then the second; but the first; therefore the second. (modus ponens)
- If the first, then the second; but not the second; therefore, not the first. (modus tollens)
- Not both the first and the second; but the first; therefore, not the second.
- Either the first or the second [and not both]; but the first; therefore, not the second.
- Either the first or the second; but not the second; therefore the first.

- 中世纪:......
- 德国哲学家、数学家莱布尼茨（Leibniz, 1646-1716）：思维演算（Calculus ratiocinator）
- 英国人乔治 · 布尔（George Boole，1815-1864）：布尔代数（命题逻辑的代数化）
  - *Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning* (1847)
  - *An Investigation of the Laws of Thought on Which are Founded the Mathematical Theories of Logic and Probabilities* (1851)

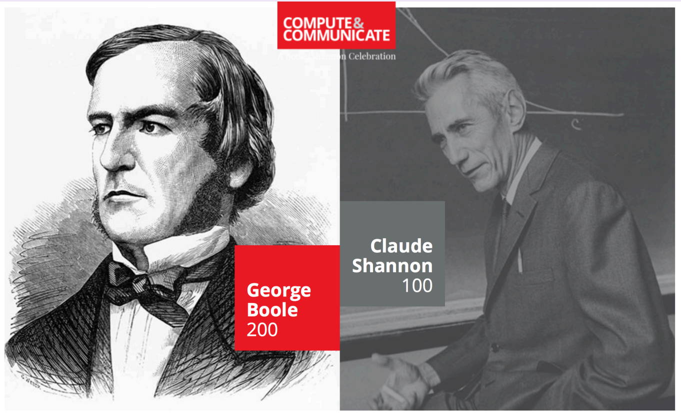
Boole is a pivotal figure who can be described as the ‘father of the information age’. His invention of Boolean algebra and symbolic logic pioneered a new mathematics. His legacy surrounds us everywhere, in the computers, information storage and retrieval, electronic circuits and controls that support life, learning and communications in the 21st century.

—University College Cork

Boole and Shannon

Boole: Father of the Information Age

Shannon (1916 - 2001): Father of the Information Theory



主要内容

命题

命题对事物情况做出陈述的语句。一般情况下，每个命题要么为真，要么为假。

例子：

- 苏格拉底是哲学家。
- 如果数 $x + y$ 是偶数，那么或者数 x 和 y 都是偶数或者数 x 和 y 都不是偶数

命题

命题对事物情况做出陈述的语句。一般情况下，每个命题要么为真，要么为假。

例子：

- 苏格拉底是哲学家。
- 如果数 $x+y$ 是偶数，那么或者数 x 和 y 都是偶数或者数 x 和 y 都不是偶数

- 明天天晴
- 如果明天天晴，那么我们就去野餐
- 2 大于 1
- 2 是偶数并且大于 1
- 苏格拉底是哲学家
- 苏格拉底不是哲学家

- 有些命题不能再对其进行拆分，否则被拆分出来的将不再是命题。
  - 明天天晴
  - 2 大于 1
  - 苏格拉底是哲学家
- 有些命题由更简单的命题组合而成。
  - **如果** 明天天晴， **那么** 我们就去野餐
  - 2 是偶数并且大于 1（= 2 是偶数 **并且** 2 大于 1）
  - 苏格拉底不是哲学家（= **并非** 苏格拉底是哲学家）

命题联接词

用来联接命题并且联接得到的仍然是命题的语词称为是**命题联接词**。

常见的有代表性的命题联接词有:

- 并非……
- ……并且……
- ……或者……
- 如果……,那么……
- 当且仅当……,才

命题联接词

用来联接命题并且联接得到的仍然是命题的语词称为是**命题联接词**。

常见的有代表性的命题联接词有：

- 并非……
- ……并且……
- ……或者……
- 如果……，那么……
- 当且仅当……，才

简单命题与复合命题

- 复合命题：可通过命题联接词联接若干个命题得到的命题。
- 简单命题：不是复合命题的命题。

主要内容

在数学中，公式 x^2+2x+1 表示一个数的平方加上这个数的两倍再加 1

在逻辑学中，我们要作类似的事，比如，用 $\neg(p\wedge q)$ 表示“并非 p、q 都成立”

在数学中，等式 $x^2+2x+1=(x+1)^2$ 对任何数都成立

在逻辑学中，有规律 $\neg(p\wedge q)\Leftrightarrow(\neg p\vee\neg q)$：“并非 p、q 都成立”等价于“p 或 q 至少有一个不成立”

联接词符号

符号	名称	意义
$\neg$	并非	并非
$\vee$	析取	或者
$\wedge$	合取	并且
$\rightarrow$	蕴涵	如果，那么

$\neg A$	并非 A
$(A \vee B)$	A 或者 B
$(A \wedge B)$	A 并且 B
$(A \rightarrow B)$	如果 A，那么 B

此外，

$(A \leftrightarrow B)$ 当且仅当 A，才 B

例子

如果物体不受外力的作用，那么它必然保持静止状态或匀速直线运动

解答

用 p 表示“物体受外力的作用”，
用 q 表示“物体保持静止状态”，
用 r 表示“物体保持匀速直线运动”。
上一命题可先转化为：如果并非 p，那么或者 q，或者 r。
据此，再转化为：

$$\neg p \to (q \vee r)。$$

最后转化出来的公式称为原命题的**形式**。

例子

如果物体不受外力的作用，那么它必然保持静止状态或匀速直线运动

解答

用 p 表示“物体受外力的作用”，
用 q 表示“物体保持静止状态”，
用 r 表示“物体保持匀速直线运动”。
上一命题可先转化为：如果并非 p，那么或者 q，或者 r。
据此，再转化为：

$$\neg p \to (q \vee r)。$$

最后转化出来的公式称为原命题的**形式**。

例子

如果物体不受外力的作用，那么它必然保持静止状态或匀速直线运动

解答

用 p 表示 “物体受外力的作用”，
用 q 表示 “物体保持静止状态”，
用 r 表示 “物体保持匀速直线运动”。
上一命题可先转化为：如果并非 p，那么或者 q，或者 r。
据此，再转化为：

$$\neg p \to (q \vee r)。$$

最后转化出来的公式称为原命题的**形式**。

例子

如果物体不受外力的作用，那么它必然保持静止状态或匀速直线运动

解答

用 p 表示“物体受外力的作用”，
用 q 表示“物体保持静止状态”，
用 r 表示“物体保持匀速直线运动”。
上一命题可先转化为：如果并非 p，那么或者 q，或者 r。
据此，再转化为：

$$\neg p \to (q \vee r)。$$

最后转化出来的公式称为原命题的**形式**。

例子

如果物体不受外力的作用，那么它必然保持静止状态或匀速直线运动

解答

用 p 表示“物体受外力的作用”，
用 q 表示“物体保持静止状态”，
用 r 表示“物体保持匀速直线运动”。
上一命题可先转化为：如果并非 p，那么或者 q，或者 r。
据此，再转化为：

$$\neg p \to (q \vee r)。$$

最后转化出来的公式称为原命题的**形式**。

例子

如果数 $x+y$ 是偶数，那么数 x 和 y 都是偶数或者数 x 和 y 都不是偶数。

提示

p_1：“数 $x+y$ 是偶数”，
p_2：“数 x 是偶数”，
p_3：“数 y 是偶数”。

例子

如果数 $x+y$ 是偶数，那么数 x 和 y 都是偶数或者数 x 和 y 都不是偶数。

解答

p_1："数 $x+y$ 是偶数"，
p_2："数 x 是偶数"，
p_3："数 y 是偶数"。
该命题的形式为：

$$p_1 \to ((p_2 \wedge p_3) \vee (\neg p_2 \wedge \neg p_3))。$$

例子

君子不重则不威。学则不固。主忠信。无友不如己者。过则勿惮改。(《论语. 学而篇》)

钱穆的译本：**一个君子，不厚重，便不威严。能向学，可不固陋。**行事当以忠信为主。莫和不如己的人交友。有了过失，不要怕改。

提示

p_1: "君子厚重"，
p_2: "君子威严"，
p_3: "君子一心向学"。
p_4: "君子冥顽不化"。

钱穆的译本：**一个君子，不厚重，便不威严。能向学，可不固陋。**行事当以忠信为主。莫和不如己的人交友。有了过失，不要怕改。

提示

p_1: “君子厚重”，

p_2: “君子威严”，

p_3: “君子一心向学”。

p_4: “君子冥顽不化”。

该命题的形式为：

$$(\neg p_1 \to \neg p_2) \land (p_3 \to \neg p_4)。$$

例子

如果不同的能力具有不同的对象，而知识和意见是两种能力，并且象我们说过的那样，是不同的能力，那就应该说，知识的对象不能是意见的对象。（柏拉图《国家》）

该命题的形式为：

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \rightarrow \neg p_4。$$

例子

如果不同的能力具有不同的对象，而知识和意见是两种能力，并且象我们说过的那样，是不同的能力，那就应该说，知识的对象不能是意见的对象。（柏拉图《国家》）

该命题的形式为：

$$(p_1 \wedge p_2 \wedge \neg p_3) \to \neg p_4。$$

主要内容

命题变元

字母 p, q, r 以及带有下标的字母 p_0, p_1, p_2 如此等等被称为是**命题变元**。

公式

命题公式

按以下规则规定符号串是否是**命题公式**（简称为**公式**）。

(1) 所有命题变元都是公式。

(2) 如果 A 是公式，那么 $\neg A$ 也是公式。

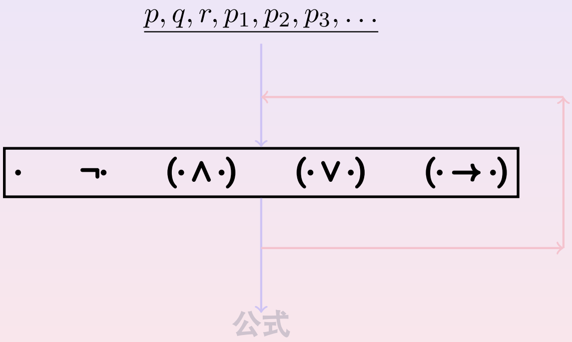
(3) 如果 A 和 B 是公式，那么 $(A \vee B)$、$(A \wedge B)$、$(A \to B)$ 也都是。

(4) 只有通过以上规则得到的符号串才是公式。

公式的直观图像

$$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

公式的直观图像


$p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots$
$\cdot$ $\neg\cdot$ $(\cdot\wedge\cdot)$ $(\cdot\vee\cdot)$ $(\cdot\to\cdot)$
公式

公式的直观图像

$$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot\wedge\cdot) \qquad (\cdot\vee\cdot) \qquad (\cdot\to\cdot)}$$

公式

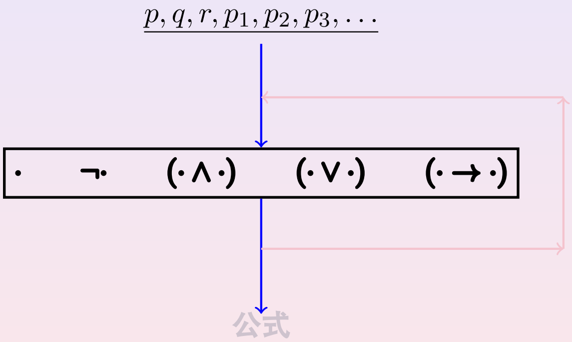
公式的直观图像

$$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

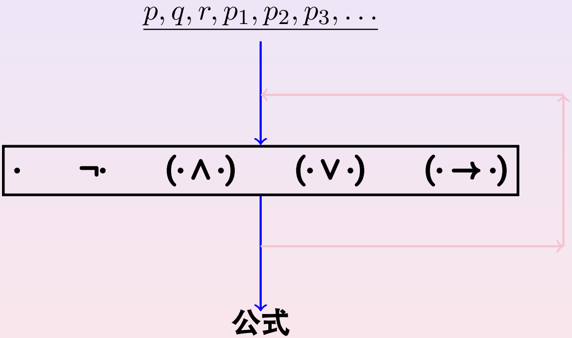
$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot\wedge\cdot) \qquad (\cdot\vee\cdot) \qquad (\cdot\to\cdot)}$$

公式

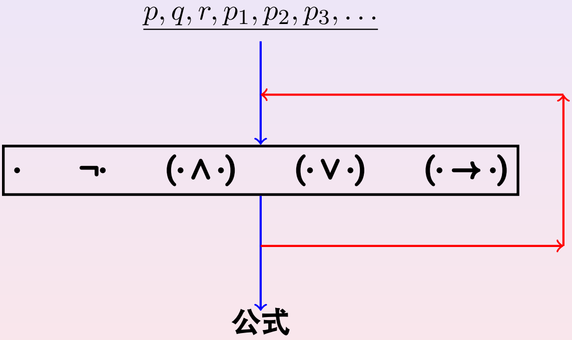
公式的直观图像


$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$
$\cdot$ $\neg\cdot$ $(\cdot\wedge\cdot)$ $(\cdot\vee\cdot)$ $(\cdot\rightarrow\cdot)$
公式

公式的直观图像


$p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots$
$\cdot$ $\neg\cdot$ $(\cdot \wedge \cdot)$ $(\cdot \vee \cdot)$ $(\cdot \to \cdot)$
公式

公式的直观图像


$p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots$
$\cdot$ $\neg\cdot$ $(\cdot \wedge \cdot)$ $(\cdot \vee \cdot)$ $(\cdot \to \cdot)$
公式

例子

$$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \land \cdot) \qquad (\cdot \lor \cdot) \qquad (\cdot \to \cdot)}$$

p_1

$\neg p_1$

$\neg\neg p_1$

$\cdots\cdots$

例子

$$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \to \cdot)}$$

$$p_1$$

$$\neg p_1$$

$$\neg\neg p_1$$

$$\cdots\cdots$$

例子

$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \to \cdot)}$$

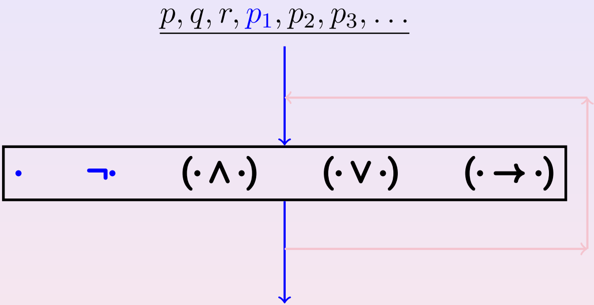
p_1

$\neg p_1$

$\neg\neg p_1$

$\cdots\cdots$

例子



p_1

$\neg p_1$

$\neg\neg p_1$

$\cdots\cdots$

例子

$$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \to \cdot)$$

$$p_1$$

$$\neg p_1$$

$$\neg\neg p_1$$

$$\cdots\cdots$$

例子

$p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots$

$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot\wedge\cdot) \qquad (\cdot\vee\cdot) \qquad (\cdot\rightarrow\cdot)}$

p_1

$\neg p_1$

$\neg\neg p_1$

$\cdots\cdots$

例子

$$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \to \cdot)}$$

$$p_1$$

$$\neg p_1$$

$$\neg\neg p_1$$

$$\cdots\cdots$$

例子

$$\underline{p, q, r, p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \to \cdot)}$$

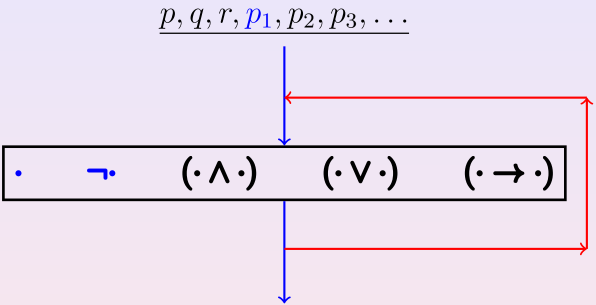
$$p_1$$

$$\neg p_1$$

$$\neg\neg p_1$$

$$\cdots\cdots$$

例子



$$p_1$$

$$\neg p_1$$

$$\neg\neg p_1$$

$$\cdots\cdots$$

例子

$$p, q, r, \ p_1, p_2, p_3, \ldots$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \to \cdot)}$$

$$p_1, p_2, p_3$$

$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

$$(p_1 \to (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子

$$\underline{p, q, r,\ p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot\wedge\cdot) \qquad (\cdot\vee\cdot) \qquad (\cdot\rightarrow\cdot)}$$

$$p_1, p_2, p_3$$

$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

$$(p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子

$$\underline{p, q, r,\ p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \rightarrow \cdot)}$$

$$p_1, p_2, p_3$$

$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

$$(p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子

$$\underline{p, q, r,\ p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot\wedge\cdot) \qquad (\cdot\vee\cdot) \qquad (\cdot\rightarrow\cdot)}$$

$$p_1, p_2, p_3$$

$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

$$(p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子

$$\underline{p, q, r,\ p_1, p_2, p_3, \ldots}$$

$$\boxed{\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \rightarrow \cdot)}$$

$$p_1, p_2, p_3$$

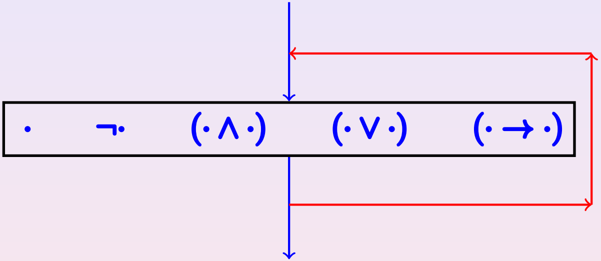
$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

$$(p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子

$$\underline{p, q, r, \; p_1, p_2, p_3, \ldots}$$



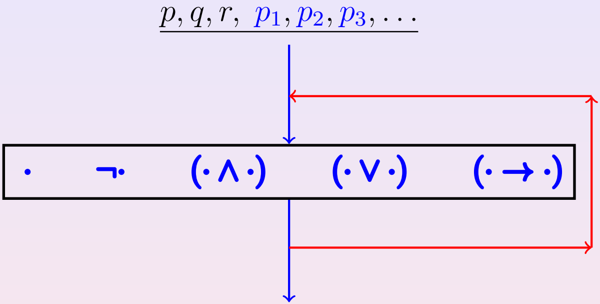
$$p_1, p_2, p_3$$

$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

$$(p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子



$$p_1, p_2, p_3$$

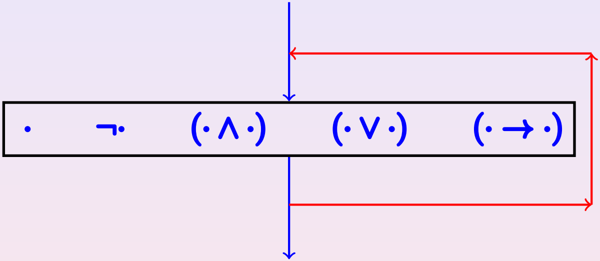
$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

$$(p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \rightarrow (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子

$$\underline{p, q, r, \; p_1, p_2, p_3, \ldots}$$



$$p_1, p_2, p_3$$

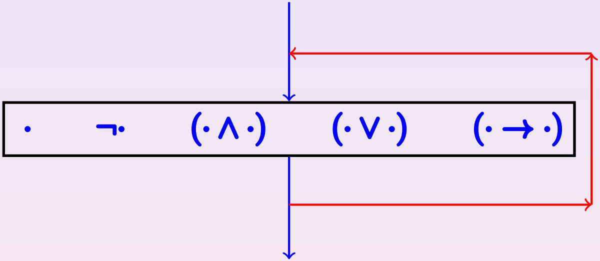
$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

$$(p_1 \to (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子

$$\underline{p, q, r,\ p_1, p_2, p_3, \ldots}$$



$$p_1, p_2, p_3$$

$$\neg p_3, (p_1 \vee p_2)$$

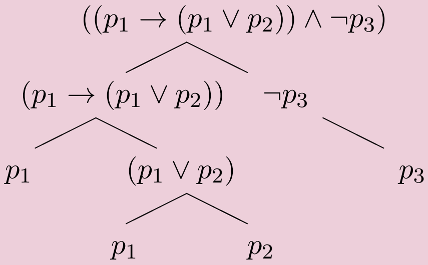
$$(p_1 \to (p_1 \vee p_2))$$

$$((p_1 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

例子

公式 $((p_1 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$ 的形成过程

从下往上看：



公式的**主联接词**：在公式的形成过程中，最后一次使用到的联接词。

例子

公式 $((p_1 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$ 的形成过程

从下往上看:

$$((p_1 \to (p_1 \vee p_2)) \wedge \neg p_3)$$

$$(p_1 \to (p_1 \vee p_2)) \qquad \neg p_3$$

$$p_1 \qquad (p_1 \vee p_2) \qquad p_3$$

$$p_1 \qquad p_2$$

公式的**主联接词**：在公式的形成过程中，最后一次使用到的联接词。

使用等值符号

通过规定

$$(A \leftrightarrow B) \text{ 定义为 } ((A \to B) \wedge (B \to A))$$

可以使用符号“$\leftrightarrow$”。

例如，公式

$$((\neg p \to q) \wedge (q \to \neg p))$$

可“缩写”为

$$(\neg p \leftrightarrow q)。$$

公式的简化

请参考教材 5.2 节。

Thanks for your attention!

Q & A