Deciding Validity
(有效性的判定)

熊　明
mingshone@163.com

School of Politics and Administration
South China Normal University

主要内容

主要内容

1. 推理的有效性
2. 解析树方法
3. 解析树的规则（optional）

例子

- “欲寄君衣君不还，不寄君衣君又寒，寄与不寄间，妾身千万难。”试分析这段话中的推理是否有效。

解答

- 这段话中所包含的推理为：**若寄衣服给老公，则老公不回家；若不寄衣服，则老公会被冻着；寄衣服给老公或者不寄，所以，或者老公不回家，或者老公会被冻着。**
- 其形式如下

$$\frac{p_1 \to \neg p_2, \neg p_1 \to p_3, p_1 \vee \neg p_1}{\neg p_2 \vee p_3}$$

现在，问题变为判断上一推理形式是否有效。

解答

- 这段话中所包含的推理为：**若寄衣服给老公，则老公不回家；若不寄衣服，则老公会被冻着；寄衣服给老公或者不寄，所以，或者老公不回家，或者老公会被冻着。**
- 其形式如下

$$\frac{p_1 \to \neg p_2, \neg p_1 \to p_3, p_1 \vee \neg p_1}{\neg p_2 \vee p_3}$$

现在，问题变为判断上一推理形式是否有效。

- 其形式如下

$$\frac{p_1 \to \neg p_2, \neg p_1 \to p_3, p_1 \vee \neg p_1}{\neg p_2 \vee p_3}$$

- 建立上述推理形式中四个公式的真值表如下：

p_1	p_2	p_3	$p_1 \to \neg p_2$	$\neg p_1 \to p_3$	$p_1 \vee \neg p_1$	$\neg p_2 \vee p_3$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

- 其形式如下

$$\frac{p_1 \to \neg p_2, \neg p_1 \to p_3, p_1 \vee \neg p_1}{\neg p_2 \vee p_3}$$

- 建立上述推理形式中四个公式的真值表如下：

p_1	p_2	p_3	$p_1 \to \neg p_2$	$\neg p_1 \to p_3$	$p_1 \vee \neg p_1$	$\neg p_2 \vee p_3$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

- 建立上述推理形式中四个公式的真值表如下：

p_1	p_2	p_3	$p_1 \to \neg p_2$	$\neg p_1 \to p_3$	$p_1 \vee \neg p_1$	$\neg p_2 \vee p_3$
T	T	T	F	T	T	T
T	T	F	F	T	T	F
T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	T	T	T	T
F	T	T	T	T	T	T
F	T	F	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T
F	F	F	T	F	T	T

- 从上一真值表可以看出，在前面的推理形式中，如果前提为真，结论也必然为真（没有例外）。因此，此推理形式有效。最后，可以断定原推理是有效的。

推理有效性的规定

定义

设一个推理的形式如下：

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

又设这个形式中出现的命题变元只有 $p_1, p_2, \ldots, p_m$。如果在这些命题变元的所有取值情况中，不存在情况使得推理形式的前提都为真而结论为假，那么就称这个推理形式是（演绎）**有效的**。也可称 A_1、A_2、…、A_n **有效地推出** B。

推理有效性的特例

定义

无前提的推理形式：

$$\frac{\qquad}{B}$$

如果是有效的，就称公式 B 是**有效的**。此时，B 在其中命题变元的任意取值情况下都为真，因此，又把 B 称为 B 是**重言的**（tautology）、恒真的。

重言式的例子

- $p \to p$（同一律）
- $p \vee \neg p$（排中律：命题与其否定至少有一为真）
- $\neg(p \wedge \neg p)$（不矛盾律：命题与其否定不能同时为真）

使用真值表判断公式是否是重言式

p	q	r	$(p \vee q \to r) \to (p \to r) \vee (q \to r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	T
F	T	T	T
F	T	F	T
F	F	T	T
F	F	F	T

使用真值表判断公式是否是重言式

p	q	r	$(p \vee q \to r) \leftrightarrow (p \to r) \vee (q \to r)$
T	T	T	T
T	T	F	T
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	T
F	F	F	T

主要内容

1. 推理的有效性
2. 解析树方法
3. 解析树的规则（optional）

解析树

解析树，是命题逻辑及其扩充逻辑中用于判定推理形式有效与否的过程。这种判定方法为荷兰逻辑学家 Beth 于 1955 年提出，后为美国逻辑学家 Smullyan 进一步简化。(wiki)

解析树的构造

- 思想：为判断推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

  是否有效，试图去寻找相关命题变元的一种取值情况，使得前提 A_1, A_2, ..., A_n 都为真，而结论 B 为假。
- 过程：假设前提 A_1, A_2, ..., A_n 都为真而结论 B 为假，由此反推相关命题变元的取值情况。
- 约定：在解析树中，写出一个公式就表示这个公式为真，反之为表示一个公式为假，就写出这个公式的否定。

例子 1: 判断公式 $(p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2)$ 是否是重言式?

构造解析树过程:

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

过程的解释:

第一步：写下原公式的否定，这表示假定原公式为假。

构造解析树过程:

$$\begin{array}{c} \neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2)) \\ | \\ p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2) \end{array}$$

过程的解释:

第二步，在这个公式下边写出公式 $p_1 \vee p_2$ 和 $\neg(p_1 \to p_2)$，并用一条竖线连接原公式的否定与这个两个公式（后两个公式间用逗号分开）。这相当于从原公式为假得到 $p_1 \vee p_2$ 为真，$p_1 \to p_2$ 为假。这一步可以称为对原公式的否定进行了一次**解析**。

构造解析树过程:

$$
\begin{array}{c}
\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2)) \\
| \\
p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2) \\
| \\
p_1, \neg p_2
\end{array}
$$

过程的解释:
第三步，在第二步得到的公式下面写出公式 p_1 和 $\neg p_2$，仍用用一条竖线连接第二步的公式与这两个公式。这一步的道理与第二步相同。这一步对 $\neg(p_1 \to p_2)$ 进行了一次解析。

构造解析树过程：

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$$

$$p_1, \neg p_2$$

$$p_1 \qquad p_2$$

过程的解释：

最后一步，在第三步得到的公式下方分出两个叉，在每个叉的下方分别写出公式 p_1、p_2。这一步出现分叉，这实际相当于由 $p_1 \vee p_2$ 为真得到两种可能性：p_1 为真，或 p_2 为真。这一步对 $p_1 \vee p_2$ 进行了一次解析。

一些术语

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$\boldsymbol{p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)}$$

$$\boldsymbol{p_1, \neg p_2}$$

$$\boldsymbol{p_1 \quad p_2}$$

- **这是一个树形图，简称树**（倒着的！）。
- 最上面的公式称为**根**，最下面的公式称为**叶**。
- 从根到某个叶所经历的所有公式称为一个**枝**。

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$$

$$p_1, \neg p_2$$

p_1 别看我

- 这个树有两个枝。
- 第一个枝：
  $\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$,
  $p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$,
  $p_1, \neg p_2, p_1$

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$$

$$p_1, \neg p_2$$

别看我 $\quad p_2$

- 这个树有两个枝。
- 第二个枝：

  $\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$,

  $p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$,

  $p_1, \neg p_2, p_2$

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$$

$$p_1, \neg p_2$$

p_1　别看我

- 每个枝表示取值的一种可能性。
- 第一个枝：
  $\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$,
  $p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$,
  $p_1, \neg p_2, p_1$
- 这表示要使原公式为假，要求：p_1 为真，p_2 为假

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$$

$$p_1, \neg p_2$$

别看我 $\quad p_2$

$$\times$$

- 这个树有两个枝。
- 第二个枝：
  $\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$,
  $p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$,
  $p_1, \neg p_2, p_2$
- 这表示要使原公式为假，要求：p_1 为真，p_2 为假且为真，这一要求是不可能实现的

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$|$$

$$p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$$

$$|$$

$$p_1, \neg p_2$$

$$\diagup \quad \diagdown$$

$$p_1 \qquad p_2$$

$$|$$

$$\times$$

- 综上所述，要使原公式为假，必须使得 p_1 为真，p_2 为假。仍由解析树不难判断在 p_1 为真，p_2 为假时，原公式为假。由此可判断原公式不是重言式。

例子 2: 判断 $(\neg p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2)$ 是否是重言式?

$$\neg((\neg p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$\neg p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \to p_2)$$

$$p_1, \neg p_2$$

$$\neg p_1 \qquad p_2$$

$$\times \qquad \times$$

构造 $\neg((\neg p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$ 的解析树如图。判断：这个解析树有两个枝，每个枝中都出现命题变元及其否定。这意味着：不会存在命题变元的取值情况使得原公式为假。所以，可以判断原公式是重言式。

解析树判断重言式的原理

对于公式 A，建立 $\neg A$ 的解析树，使得解析树中的公式除命题变元及其否定之外都被解析了一次（这样的解析树称为是**饱和的**）。

- 如果该解析树中的每个枝都含有某个变元及其否定（**闭枝**），那么 A 是重言式；
- 否则，A 不是重言式。

解析树判断推理有效性的一般原理

对于推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

建立

$$\boxed{???}$$

的解析树，使得解析树中的公式除命题变元及其否定之外都被解析了一次（这样的解析树称为是**饱和的**）。

- 如果该解析树中的每个枝都含有某个变元及其否定（**闭枝**），那么原推理形式是有效的；
- 否则，原推理形式是有效的。

解析树判断推理有效性的一般原理

对于推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

建立

$$\boxed{A_1, A_2, \ldots, A_n, \neg B}$$

的解析树，使得解析树中的公式除命题变元及其否定之外都被解析了一次（这样的解析树称为是**饱和的**）。

- 如果该解析树中的每个枝都含有某个变元及其否定（**闭枝**），那么原推理形式是有效的；
- 否则，原推理形式是无效的。

解析树判断推理有效性的一般原理

对于推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

建立

$$\boxed{\neg((A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \rightarrow B)}$$

的解析树，使得解析树中的公式除命题变元及其否定之外都被解析了一次（这样的解析树称为是**饱和的**）。

- 如果该解析树中的每个枝都含有某个变元及其否定（**闭枝**），那么原推理形式是有效的；
- 否则，原推理形式是无效的。

例子 3: 判断推理形式

$$\frac{(p \wedge q) \to \neg r, p \wedge r}{\neg q}$$

是否有效?

解答 1：从下面三个公式出发构造解析树

$$(p \wedge q) \to \neg r, p \wedge r, \neg\neg q$$

……

例子 3: 判断推理形式

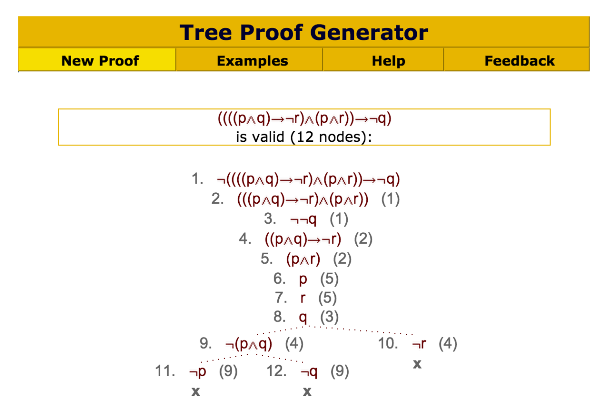
$$\frac{(p \wedge q) \rightarrow \neg r, p \wedge r}{\neg q}$$

是否有效?

解答 2：从下一公式出发构造解析树

$$\neg((((p \wedge q) \rightarrow \neg r) \wedge (p \wedge r)) \rightarrow \neg q)$$

解析树如下：



这个公式是重言式，由此可知原推理形式是有效的。

同真值表法一样，解析树法是一种“机械的”判定方法，这种方法可在计算机上实现。

判定的一个可执行程序，参见：Tree Proof Generator

主要内容

1. 推理的有效性
2. 解析树方法
3. 解析树的规则（optional）

合取规则

理解解析树的构造思想后，只需“机械地”使用下面的规则就可以构造出解析树：

$$\begin{array}{c} A \wedge B \\ \vdots \\ A, B \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg(A \wedge B) \\ \vdots \\ \neg A \quad \neg B \end{array}$$

析取规则

$$A \vee B$$
$$\vdots$$
$$A \quad B$$

$$\neg(A \vee B)$$
$$\vdots$$
$$\neg A, \neg B$$

蕴涵规则

$$
\begin{array}{c}
A \to B \\
\mid \\
\vdots \\
\diagup \quad \diagdown \\
\neg A \qquad B
\end{array}
\qquad\qquad\qquad
\begin{array}{c}
\neg(A \to B) \\
\mid \\
\vdots \\
\mid \\
A, \neg B
\end{array}
$$

等值规则

$$A \leftrightarrow B$$

$$\vdots$$

$$A, B \qquad \neg A, \neg B$$

$$\neg(A \leftrightarrow B)$$

$$\vdots$$

$$A, \neg B \qquad \neg A, B$$

双重否定规则

$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ \vdots \\ | \\ A \end{array}$$

Thanks for your attention!

Q & A