Lecture 1: 模态公式与关系语义

熊　明

1　学习目标

(1) 熟悉模态公式的定义

(2) 使用模态公式表示模态命题

(3) 熟悉关系语义的基本构成

(4) 熟悉模态公式的赋值规定

2　引导问题

(1) 模态公式的递归定义是什么?

(2) 如何实现模态公式与模态命题的互译?

(3) 什么是框架、赋值和模型?

(4) 模态公式在模型上的真值是如何规定的?

(5) 通过重新设定初始连接词和算子，规定模态公式

(6) 在重新设定初始连接词和算子的条件下，给出关系语义的基本设定

(7) 同上，重新设定模态公式的赋值规定

3 教学纲要

例子 1 简化下列模态公式:

(1) $(\Box(\Box p_1 \to p_1) \to \Box p_1)$

(2) $(\Diamond\Box p_1 \to (\Box\Diamond p_1 \vee \Box\Diamond p_2))$

(3) $((\Box p_1 \wedge \Diamond p_2) \leftrightarrow \Diamond(p_1 \to \Box\Diamond p_2))$

解答 (1) $\Box(\Box p_1 \to p_1) \to \Box p_1$

(2) $\Diamond\Box p_1 \to \Box\Diamond p_1 \vee \Box\Diamond p_2$

(3) $\Box p_1 \wedge \Diamond p_2 \leftrightarrow \Diamond(p_1 \to \Box\Diamond p_2)$

例子 2 用 p_0、p_1 表示语句 “明天下雨”、“后天下雨”，写出下列模态语句的形式:

(1) 明天和后天都不可能下雨。

(2) 如果明天必然下雨是可能的，那么明天可能下雨就是必然的。

(3) 如果明天或者后天有可能下雨，那么明天可能下雨或者后天可能下雨。

解答 (1) $\neg\Diamond p_1 \wedge \neg\Diamond p_2$

(2) $\Diamond\Box p_1 \to \Box\Diamond p_1$

(3) $\Diamond(p_1 \vee p_2) \to \Diamond p_1 \vee \Diamond p_2$

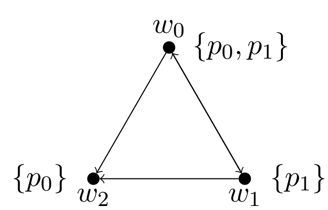
例子 3 模型 $\mathcal{M}$ 的规定如图 1 所示。判断下列公式在 $\mathcal{M}$ 上关于 w_0 为真还是为假。

(1) $\Diamond\Box p_1 \to \Box\Diamond p_1$

(2) $\Diamond\neg p_2 \to \Box\neg\Diamond p_2$

(3) $\Box(p_1 \vee \Diamond p_0)$

Figure 1　模型 $\mathcal{M}$ 示意图



解答 (1) F

(2) T

(3) F

例子 4 设框架 $\mathcal{K}$ 如图 1 所示（忽略其中的赋值）。在框架 $\mathcal{K}$ 上找到所有的赋值 $\mathcal{V}$，使得模型 $\mathcal{M} = \langle \mathcal{K}, \mathcal{V} \rangle$ 下列条件：

(1) $\neg\Box p_1 \wedge \Box p_2$ 在 w_0 为真

(2) $\Diamond p_2 \to \neg\Box p_1$ 在 w_1 为真

(3) $\Box p_1 \to p_1$ 在 w_2 亦为真

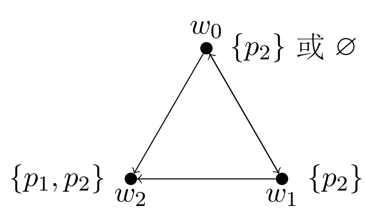
解答 $w_2 \models \Box p_1 \to p_1$ 推出 $w_2 \models p_1$。$w_0 \models \neg\Box p_1 \wedge \Box p_2$ 可推出 $w_0 \models \Box p_2$，故 $w_2 \models p_2$。

$w_0 \models \Box p_2$ 还可推出 $w_1 \models p_2$。$w_0 \models \neg\Box p_1 \wedge \Box p_2$ 还可推出 $w_0 \models \neg\Box p_1$，由此，推出 $w_1 \not\models p_1$（why?）。

$w_2 \models p_2$ 推出 $w_1 \models \Diamond p_2$，根据 $w_1 \models \Diamond p_2 \to \neg\Box p_1$，推出 $w_1 \models \neg\Box p_1$，继而推出 $w_0 \not\models p_1$。此外，不难看出，p_2 在 w_0 可真可假。

如图 2 所示。

Figure 2　解答示意图



4　课后任务

问题 4.1 在适当的材料（书或互联网）中查找 $\Box^n$、$\Diamond^n$、R^n、R^* 的定义，并熟悉它。

问题 4.2 证明：$\mathcal{M}, w \models \Box^n A$，当且仅当 $\mathcal{M}, u \models A$ 对所有满足 $wR^n u$ 的 u 都成立。

问题 4.3 证明：$\mathcal{M}, w \models \Diamond^n A$，当且仅当 $\mathcal{M}, u \models A$ 对至少一个满足 $wR^n u$ 的 u 成立。

问题 4.4 (optional) 是否存在模态算子的一种重叠组合 O（比如，$\Box^2\Diamond^3\Box^7$），使得：$\mathcal{M}, w \models OA$，当且仅当 $\mathcal{M}, u \models A$ 对任意满足 $wR^* u$ 的 u 成立。