

Lecture 4: 模态系统 GL

熊 明

1 学习目标

- (1) 熟悉系统 KW (GL) 的基本构成
- (2) 熟悉 KW 的 soundness
- (3) 熟悉模态系统的 soundness

2 引导问题

- (1) 模态系统 KW (GL) 共有的公理有哪些?
- (2) 在 KW 中如何推导出公理 4?
- (3) KW 中有哪些比较特别的内定理?

3 教学纲要

例子 1 证明下列公式在 GL 中可证:

- (1) $\Box(\Box A \rightarrow A) \leftrightarrow \Box A$
- (2) $\Box(\Box A \rightarrow A) \leftrightarrow \Box(\Box A \wedge A)$

$$(3) \quad \Box \Diamond p \rightarrow \Box \perp$$

例子 2 证明模式 4 在 GL 中可证:

例子 3 证明下列公式在 GL 中可证:

$$(1) \quad \Box(p \leftrightarrow \Box p) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \top)$$

$$(2) \quad \Box(p \leftrightarrow \Box \neg p) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \Box \perp)$$

$$(3) \quad \Box(p \leftrightarrow \neg \Box \neg p) \leftrightarrow \Box(p \leftrightarrow \perp)$$

解答 课堂重点

例子 4 规定: 框架 $\mathcal{K} = \langle W, R \rangle$ 称为是逆良基的 (converse well-founded),

如果 W 中**不存在**点 $w_0, w_1, \dots, w_n, \dots$, 使得对任意 $i \geq 0$, $w_i R w_{i+1}$.

证明: $\Box(\Box p \rightarrow p) \rightarrow \Box p$ 在框架 \mathcal{K} 上是有效的, 当且仅当此框架是传递且逆良基的。

解答 参见 Boolos (1993), pp. 75-76.

例子 5 证明系统 GL 相对于传递且逆良基的框架是可靠的 (sound)。即: 对任意公式 A , 若 $GL \vdash A$, 则对任意传递且逆良基的框架 \mathcal{K} , 都有 $\mathcal{K} \models A$ 。

解答 参见 Boolos (1993), pp. 76.

4 课后任务

问题 4.1 证明系统 K 相对于任意框架是可靠的 (K 的可靠性定理)。

问题 4.2 陈述并证明系统 D、T、K4、B、S4、S5 的可靠性定理。(提示：参见 Boolos (1993), pp. 74.)

问题 4.3 阅读 Boolos (1993), Theorem 11, pp. 76.

问题 4.4 令 GL_2 是在 GL 中用公理模式 $\Box(\Box^2 A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$ 代替 $\Box(\Box A \rightarrow A) \rightarrow \Box A$ 得到的模态系统。证明在 GL_2 中可证 $\Box A \rightarrow \Box^3 A$.