

Lecture 3: 模态系统

熊 明

1 学习目标

- (1) 熟悉模态系统的基本成分
- (2) 熟悉系统 K、K4 等的基本构成
- (3) 熟悉以上系统中的推导
- (4) 熟悉其他常见的模态系统（在讲义之外，但在 Boolos 的书中）

2 引导问题

- (1) 模态系统 K、K4 等共有的公理有哪些？它们各自的特征公理（模式）是什么？
- (2) 模态系统中的证明是如何规定的？
- (3) 把现在学习到的模态系统与一阶逻辑中的公理系统进行比较
- (4) 什么叫正规模态系统（通过互联网查询，课堂不会介绍，但必须通过自学掌握）？

3 教学纲要

例子 1 规定：

系统 D 是在 K 中添加公理模式 $\Box A \rightarrow \Diamond A$ 得到的，

而系统 T 是在 K 中添加公理模式 $\Box A \rightarrow A$ 得到的。

证明：D 是 T 的子系统（在 D 中可证的公式在 T 中也一定可证）。

例子 2 规定：

系统 B 是在 T 中添加公理模式 $A \rightarrow \Box \Diamond A$ 得到的，

系统 S4 是在 T 中添加公理模式 $\Box A \rightarrow \Box \Box A$ 得到的，

系统 S5 是在 T 中添加公理模式 $\Diamond A \rightarrow \Box \Diamond A$ 得到的，

证明：

- (1) B 是 S5 的子系统。
- (2) S4 是 S5 的子系统。
- (3) (以后要证明：B 与 S4 互不为子系统)

解答 课堂重点

例子 3 证明以下公式在 B 中都是可证的：

- (1) $\Diamond \Box A \rightarrow \Box \Diamond A$
- (2) $\Diamond \Box A \wedge \Diamond \Box B \rightarrow \Box \Diamond (A \wedge B)$

$$(3) A \rightarrow \Box \Diamond \Box \Diamond A$$

$$(4) A \rightarrow \Box \Box \Diamond \Diamond A$$

解答 课堂重点

例子 4 证明以下公式在 S4 中都是可证的：

$$(1) \Box A \leftrightarrow \Box \Box \Box A$$

$$(2) \Diamond A \leftrightarrow \Diamond \Diamond A$$

$$(3) \Diamond \Box A \leftrightarrow \Diamond \Box \Diamond \Box A$$

$$(4) \Box A \rightarrow \Box \Diamond \Box A$$

4 课后任务

问题 4.1 证明以下公式在 S5 中都是可证的：

$$(1) \Box A \leftrightarrow \Diamond \Box A$$

$$(2) \Box(A \vee \Box B) \leftrightarrow \Box A \vee \Box B$$

$$(3) \Box(A \vee \Diamond B) \leftrightarrow \Box A \vee \Diamond B$$

$$(4) \Box(\Box A \rightarrow \Box B) \vee \Box(\Box B \rightarrow \Box A)$$

问题 4.2 学习: Boolos 1993, 第 1 章 Theroem 17 (p.10) 之前的所有内容.