Lecture 7: 完全性证明 III

熊 明

1 学习目标

(1) 熟悉 GL 等常见模态系统的完全性表述

(2) 熟悉 GL 等常见模态系统的完全性证明

(3) 了解同一模态系统可能有不同的刻画框架

(4) 了解使用典范模型证明模态系统的证明方法（optional）

2 引导问题

(1) 证明系统 GL 的完全性的过程与 K、K4 的完全性的过程有哪些异同?

(2) 你认为 GL 完全性证明中最困难的是哪一步?

(3) 列举 GL 的刻画框架类，尽可能列举多列几种。

(4) 前面证明完全性定理的方法与典范模型证明方法有何异同?（optional）

(5) 为何典范模型证明方法对于系统 GL 失效?（optional）

3 教学纲要

定理 3.1 (**GL 的刻画定理**) $\mathrm{GL} \vdash A$，当且仅当对任意有穷传递禁自返框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \models A$。

$\mathcal{K}$ 是禁自返的：对任意 $w \in W$，wRw 都不成立。

我们要证的：若对对任意有穷传递禁自返框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \models A$，则 $\mathrm{GL} \vdash A$。为此，我们证明：

如果 $\mathrm{GL} \nvdash A$，那么对存在有穷传递禁自返框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \not\models A$。

定义 3.2 对有穷公式集 Σ，用 $\bigwedge \Sigma$ 表示以 Σ 中的公式作为合取支得到的合取式。如果 $\mathrm{GL} \nvdash \neg(\bigwedge \Sigma)$，那么称 Σ 是 GL 一致的。

事实 3.3 为证 GL 的完全性，只需证明：如果 A 是 GL 一致的，那么存在有穷传递禁自返模型 $\langle W, R, \mathcal{V} \rangle$ 和 $w \in W$，使得 $\langle W, R, \mathcal{V} \rangle, w \models A$。

说明：W 中的可能世界将被取为相关于 A 的极大一致集。

定义 3.4 给定公式 A。规定集合 $\hat{A}$ 为由 A 的所有子公式和子公式的否定构成的（有穷）集合。对 $\hat{A}$ 的子集 Σ，如果：

(i) Σ 是 GL 一致的，

(ii) 对 A 的任意子公式 B，B 或 $\neg B$ 至少有一个在 Σ 中，

那么称 Σ 相对于 A 是 GL 极大一致的。

事实 3.5 证明：$\hat{A}$ 的任何一个 GL 一致子集都可扩充为相对于 A 的 GL 极大一致子集。

构造所需的模型 $\langle W, R, \mathcal{V} \rangle$ 如下：

- W 是 $\hat{A}$ 的所有相对于 A 的 GL 极大一致子集构成的集合。
- 对任意命题变元 $\pi \in \hat{A}$，$\underline{\pi \in \mathcal{V}(w)}$，当且仅当 $\pi \in w$。
- $u\,R\,v$，**当且仅当对** A **的任何形如** $\Box B$ **的子公式，若** $\Box B \in u$**，则** $\Box B \in v$ **且** $B \in v$；**存在** $\underline{\Box C \in v}$ **使得** $\underline{\neg\Box C \in u}$。

事实 3.6 证明：R 是 W 上的传递关系。

事实 3.7 证明：R 是 W 上的禁自返关系。

事实 3.8 证明：对 A 的每个形如 $\Box B$ 的子公式，对每个 $w \in W$：$\Box B \in w$，当且仅当对所有满足 $w\,R\,x$ 的 x，都有 $B \in x$。

事实 3.9 证明：对任意 $w \in W$，对 A 的任何子公式 B，$w \models B$，当且仅当 $B \in w$。

事实 3.10 证明：如果 $\mathcal{K}$ 是有穷传递框架，那么 $\mathcal{K}$ 是逆良基的，当且仅当它是禁自返的。

定理 3.11 (**GL 的完全性定理（第二种形式）**) 证明：$\mathrm{GL} \vdash A$，当且仅当对任意有穷传递逆良基框架 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \models A$。

4 课后任务

问题 4.1 (**GL 的完全性定理（第三种形式）**) 证明：$\mathrm{GL} \vdash A$，当且仅当对任意有穷传递禁自返的树框架 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K} \models A$。

注：树框架见 Boolos (1993), p. 83.

问题 4.2 阅读 Boolos (1993), chapter 6 (Canonical Models, optional).