

# Lecture 8: 一阶算术语言

熊 明

## 1 学习目标

- (1) 熟悉一阶算术语言的基本语法
- (2) 熟悉一阶算术语言的基本语义
- (3) 熟悉元语言层次的数学归纳法
- (4) 熟悉项和公式上的结构归纳法

## 2 引导问题

- (1) 一阶算术语义的初始符号有哪些?
- (2) 一阶算术语义的项和公式是如何规定的?
- (3) 如何解释一阶算术语义的项和公式?
- (4) 中学学过的数学归纳法有哪些, 如果你不记得, 可在网络上参考相关资料?
- (5) 项和公式上的结构归纳法证明的一般步骤是什么?

### 3 教学纲要

数学归纳法的应用：

**事实 3.1** 证明：在标准结构  $\mathcal{N}$  的任意指派  $\sigma$  下，项  $\bar{n}$  的解释恰好是自然数  $n$ 。亦即：对任意  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\bar{n}^{\mathcal{N}}[\sigma] = n$ 。

可满足概念的使用：

**事实 3.2** 证明： $\mathcal{N} \models \bar{i} + \bar{j} \equiv \bar{k}$ ，当且仅当  $i + j = k$ 。

项的结构归纳法的应用：

**事实 3.3** 对任意闭项  $t$ ，证明存在自然数  $n$ ，使得  $\mathcal{N} \models t \equiv \bar{n}$ 。

公式的结构归纳法的应用：

**事实 3.4** 对任意公式  $A(x)$  ( $x$  是其中唯一的自由变元)，对任意自然数  $n$ ， $\mathcal{N} \models A(x)[n]$ ，当且仅当  $\mathcal{N} \models A(\bar{n}/x)$ 。

### 4 课后任务

**问题 4.1** 阅读 Boolos (1993), section 1, chapter 2 (pp. 15-24).