Lecture 6: 完全性证明 II

熊　明

1　学习目标

(1) 熟悉 K4 等常见模态系统的完全性表述

(2) 熟悉 K4 等常见模态系统的完全性证明

(3) 了解 K4 等常见模态系统的可判定性及其证明（optional）

2　引导问题

(1) 证明系统 K4 的完全性的过程与明 K4 的完全性的过程有哪些异同?

(2) 你认为 K4 完全性证明中最困难的是哪一步?

(3) 把上面的问题换做系统 D，思考相同的问题。

(4) 把上面的问题换做系统 K4，思考相同的问题。

(5) 常见的模态系统都是可判定的，而我们已知（算术语言的）一阶逻辑是不可判定的，试比较这两个结论的证明过程。(optional)

3 教学纲要

定理 3.1 (**K4 的刻画定理**) $\mathrm{K4} \vdash A$，当且仅当对任意**传递**框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \models A$。

可靠性：如果 $\mathrm{K4} \vdash A$，那么对任意传递框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \models A$。

完全性：如果对任意传递框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \models A$，那么 $\mathrm{K4} \vdash A$。

我们要证的是后面这个结论。为此，我们证明：

如果 $\mathrm{K4} \nvdash A$，那么对存在传递框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \not\models A$。

定义 3.2 对有穷公式集 Σ，用 $\bigwedge \Sigma$ 表示以 Σ 中的公式作为合取支得到的合取式。如果 $\mathrm{K} \nvdash \neg(\bigwedge \Sigma)$，那么称 Σ 是 K4 一致的。

事实 3.3 为证 K4 的完全性，只需证明：如果 A 是 K4 一致的，那么存在传递模型 $\langle W, R, \mathcal{V}\rangle$ 和 $w \in W$，使得 $\langle W, R, \mathcal{V}\rangle, w \models A$。

说明：W 中的可能世界将被取为相关于 A 的极大一致集。

定义 3.4 给定公式 A。规定集合 $\hat{A}$ 为由 A 的所有子公式和子公式的否定构成的（有穷）集合。对 $\hat{A}$ 的子集 Σ，如果：

(i) Σ 是 K4 一致的，

(ii) 对 A 的任意子公式 B，B 或 $\neg B$ 至少有一个在 Σ 中，

那么称 Σ 相对于 A 是 K4 极大一致的。

事实 3.5 证明：$\hat{A}$ 的任何一个 K4 一致子集都可扩充为相对于 A 的 K4 极大一致子集。

构造所需的模型 $\langle W, R, \mathcal{V}\rangle$：

- W 是 $\hat{A}$ 的所有相对于 A 的 K4 极大一致子集构成的集合。
- 对任意命题变元 $\pi \in \hat{A}$，$\underline{\pi \in \mathcal{V}(w)}$，当且仅当 $\pi \in w$。
- $u\,R\,v$，**当且仅当对** A **的任何形如** $\Box B$ **的子公式，若** $\Box B \in u$，**则** $\Box B \in v$ **且** $B \in v$。

事实 3.6 证明：R 是 W 上的传递关系。

事实 3.7 证明：对 A 的每个形如 $\Box B$ 的子公式，对每个 $w \in W$：$\Box B \in w$，当且仅当对所有满足 $w\,R\,x$ 的 x，都有 $B \in x$。

事实 3.8 证明：对任意 $w \in W$，对 A 的任何子公式 B，$w \models B$，当且仅当 $B \in w$。

定理 3.9 (**K4 的完全性定理**) 证明：如果 A 是 K 一致的，那么存在传递模型 $\mathcal{M}$ 和其论域中世界 w, 使得 $\mathcal{M}, w \not\models A$。

4 课后任务

问题 4.1 陈述并证明系统 D 的完全性定理。。

问题 4.2 陈述并证明系统 T 的完全性定理。

问题 4.3 陈述并证明系统 B 的完全性定理。

问题 4.4 陈述并证明系统 S4 的完全性定理。

问题 4.5 陈述并证明系统 S5 的完全性定理。

问题 4.6 继续阅读 Boolos (1993), pp. 78-84.