

Lecture 2: 有效性

熊 明

1 学习目标

- (1) 熟悉各种有效性概念
- (2) 会判断公式的有效性
- (3) 会构造反模型
- (4) 初步了解模态公式与关系特性的对应

2 引导问题

- (1) 什么是模型有效，什么是模型类有效？
- (2) 什么是框架有效，什么是框架类有效？
- (3) 如何判定公式的有效性？
- (4) 什么叫做保持有效性？
- (5) 什么叫反模型？
- (6) 关系的自返、传递、对称、欧性、持续等是如何规定的？

3 教学纲要

例子 1 判定下列公式是否有效，有效则证明之，无效则构造一个反模型。

$$(1) \Box(p_0 \wedge p_1) \rightarrow \Box p_0 \wedge \Box p_1$$

$$(2) \Box(p_0 \vee p_1) \rightarrow \Box p_0 \vee \Box p_1$$

$$(3) \neg \Diamond p_0 \leftrightarrow \Box \neg p_0$$

解答 (1) 有效

(2) 无效

(3) 有效

例子 2 试证下列结论：

(1) 公式 $\Box p_0 \rightarrow p_0$ 在一个框架上是有效的，当且仅当此框架是自返的。

(2) 公式 $p_0 \rightarrow \Box \Diamond p_0$ 在一个框架上是有效的，当且仅当此框架是对称的。

(3) 公式 $\Box p_0 \rightarrow \Box \Box p_0$ 在一个框架上是有效的，当且仅当此框架是传递的。

(4) 公式 $\Diamond p_0 \rightarrow \Box \Diamond p_0$ 在一个框架上是有效的，当且仅当此框架是欧性的。

解答 课程重点

例子 3 回忆，分离规则是这样的推理规则：从 A 和 $A \rightarrow B$ 推出 B 。

回答下面的问题，并证明你的结论：

- (1) 分离规则在模型上保真吗? 即: 对任意公式 A 和 B , 任意模型 \mathcal{M} 和模型上任意点 w , 如果 $\mathcal{M}, w \models A \rightarrow B$ 且 $\mathcal{M}, w \models A$, 是否一定有 $\mathcal{M}, w \models B$?
- (2) 分离规则在模型上保持有效性吗? 即: 对任意公式 A 和 B , 任意模型 \mathcal{M} , 如果 $\mathcal{M} \models A \rightarrow B$ 且 $\mathcal{M} \models A$, 是否一定有 $\mathcal{M} \models B$?
- (3) 分离规则在框架上保持有效性吗? 即: 对任意公式 A 和 B , 任意框架 \mathcal{K} , 如果 $\mathcal{K} \models A \rightarrow B$ 且 $\mathcal{K} \models A$, 是否一定有 $\mathcal{K} \models B$?

例子 4 规定, 必然化规则是这样的推理规则: 从 A 推出 $\Box A$ 。

回答下面的问题, 并证明你的结论:

- (1) 必然化规则在模型上保真吗? 即: 对任意公式 A , 任意模型 \mathcal{M} 和模型上任意点 w , 如果 $\mathcal{M}, w \models A$, 是否一定有 $\mathcal{M}, w \models \Box A$?
- (2) 必然化规则在模型上保持有效性吗?
- (3) 必然化规则在框架上保持有效性吗?

例子 5 框架的一种性质 ϕ 与模态公式对应 A 规定为: A 在一个框架上是有效的, 当且仅当此框架满足性质 ϕ 。例如, 公式 $\Box p_0 \rightarrow p_0$ 对应自返性。

回答下面的问题, 并证明你的结论:

- (1) $\Box p_0 \rightarrow \Diamond p_0$ 对应什么性质?
- (2) $\Diamond p_0 \rightarrow \Box p_0$ 对应什么性质?

(3) $p_0 \rightarrow \Box p_0$ 对应什么性质?

(4) $\Box p_0 \rightarrow \Box \Box \Box p_0$ 对应什么性质?

4 课后任务

问题 4.1 自学: Boolos 1993, Theroem 3 和 4, p.72-73.

问题 4.2 自学: Boolos 1993, Theroem 10 和 11, p.75-76.

问题 4.3 自学: Boolos 1993, Theroem 1, p.89.

问题 4.4 (optional) 是否存在一个模态公式对应禁自返性 (即 $\forall x \neg xRx$)?