Lecture 5: 完全性证明 I

熊　明

1　学习目标

(1) 熟悉系统 K 的完全性表述

(2) 熟悉系统 K 的完全性证明

(3) 了解系统 K 的可判定性及其证明（optional）

2　引导问题

(1) 证明模态系统 K 的完全性的一般过程是什么?

(2) 模态系统 K 完全性定理的证明中极大一致集是如何设定的? 与一阶逻辑完全性证明中极大一致集的设定有哪些异同?

(3) 你认为 K 完全性证明中最困难的是哪一步?

(4) 什么叫系统 K 的可判定性?（optional）

3 教学纲要

提示：此次课程相较于前几次，难度有所增加！为了便于大家理解完全性定理的证明，我们将把整个过程进行拆分。

定理 3.1 (**K 的刻画定理**) $\mathrm{K} \vdash A$，当且仅当对任意框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \models A$。

可靠性：如果 $\mathrm{K} \vdash A$，那么对任意框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \models A$。

完全性：如果对任意框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \models A$，那么 $\mathrm{K} \vdash A$。

我们要证的是后面这个结论。为此，我们证明：

如果 $\mathrm{K} \nvdash A$，那么对存在框架 $\mathcal{K}, \mathcal{K} \not\models A$。

定义 3.2 对有穷公式集 Σ，用 $\bigwedge \Sigma$ 表示以 Σ 中的公式作为合取支得到的合取式。如果 $\mathrm{K} \nvdash \neg(\bigwedge \Sigma)$，那么称 Σ 是 K 一致的。

例子 1 设 Σ 是 K 一致的。证明：$\bot \notin \Sigma$。

事实 3.3 为证 K 的完全性，只需证明：如果 A 是 K 一致的，那么存在模型 $\langle W, R, \mathcal{V}\rangle$，存在 $w \in W$，使得 $\langle W, R, \mathcal{V}\rangle, w \models A$。

说明：W 中的可能世界将被取为相关于 A 的极大一致集。

定义 3.4 给定公式 A。规定集合 $\hat{A}$ 为由 A 的所有子公式和子公式的否定构成的（有穷）集合。对 $\hat{A}$ 的子集 Σ，如果：

(i) Σ 是 K 一致的，

(ii) 对 A 的任意子公式 B，B 或 $\neg B$ 至少有一个在 Σ 中，

那么称 Σ 相对于 A 是 K 极大一致的。

事实 3.5 证明：$\hat{A}$ 的任何一个 K 一致子集都可扩充为相对于 A 的 K 极大一致子集。

例子 2 设 Σ 是相对于 A 的 K 极大一致子集。证明：对 A 的任意子公式 B，$\neg B \in \Sigma$，当且仅当 $B \notin \Sigma$。

构造所需的模型 $\langle W, R, \mathcal{V} \rangle$ 如下：

- W 是 $\hat{A}$ 的所有相对于 A 的 K 极大一致子集构成的集合。
- 对任意命题变元 $\pi \in \hat{A}$，$\underline{\pi \in \mathcal{V}(w)}$，当且仅当 $\pi \in w$。
- **$u\,R\,v$，当且仅当对 A 的任何形如 $\Box B$ 的子公式，若 $\Box B \in u$，则 $B \in v$。**

事实 3.6 证明：对 A 的每个形如 $\Box B$ 的子公式，对每个 $w \in W$：$\Box B \in w$，当且仅当对所有满足 $w\,R\,x$ 的 x，都有 $B \in x$。

事实 3.7 证明：对任意 $w \in W$，对 A 的任何子公式 B，$w \models B$，当且仅当 $B \in w$。

定理 3.8 (**K 的完全性定理**) 证明：如果 A 是 K 一致的，那么存在模型 $\langle W, R, \mathcal{V} \rangle$，存在 $w \in W$，使得 $\langle W, R, \mathcal{V} \rangle, w \models A$。

4 课后任务

问题 4.1 阅读 Boolos (1993), pp. 78-84.

问题 4.2 陈述并证明系统 K4 的完全性定理。