一阶语言
(First Order Language)

熊　明
mingshone@163.com

South China Normal University

主要内容

主要内容

第一组例子

- 苏格拉底是数学家。
- 哲学家都是数学家。
- 哲学家都不是数学家。

- 苏格拉底是数学家。
- 哲学家都是数学家。
- 哲学家都不是数学家。

- 苏格拉底不是数学家。
- 有的哲学家不是数学家。
- 有的哲学家是数学家。

第二组例子

- 苏格拉底培养了柏拉图。
- 苏格拉底培养了所有的哲学家。
- 有位哲学家培养了所有的哲学家。

- 苏格拉底培养了柏拉图。
-
-
- 苏格拉底没有培养柏拉图。
-
-

-
- 苏格拉底培养了所有的哲学家。
-
-
- 苏格拉底并没有培养所有的哲学家。
-

-
- 苏格拉底培养了所有的哲学家。
-
-
- 苏格拉底并没有培养所有的哲学家（有位哲学家，Ta 不是由苏格拉底培养出的。）
-

-
-
- 有位哲学家培养了所有的哲学家。
-
-
- 有位哲学家并没有培养所有的哲学家。

-
-
- 有位哲学家培养了所有的哲学家（至少有一位哲学家，Ta 培养了所有的哲学家。）

-
-
- ~~有位哲学家并没有培养所有的哲学家。~~
  没有一位哲学家培养了所有的哲学家（对任意哲学家，都存在一位哲学家，前者没有培养后者。）

第三组例子

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = b.$$

- 对任意实数 $\epsilon > 0$，都存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$，

$$|a_n - b| < \epsilon.$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = b.$$

- 对任意实数 $\epsilon > 0$，都存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$，

$$|a_n - b| < \epsilon.$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq b.$$

- 存在实数 $\epsilon > 0$，使得对任意正整数 N，都存在 $n \geq N$，

$$|a_n - b| \geq \epsilon.$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = b.$$

- 对任意实数 $\epsilon > 0$，都存在正整数 N，使得对任意 $n \geq N$，

$$|a_n - b| < \epsilon.$$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n \neq b.$$

- 存在实数 $\epsilon > 0$，使得对任意正整数 N，都存在 $n \geq N$，

$$|a_n - b| \geq \epsilon.$$

主要内容

- 苏格拉底是哲学家
- 苏格拉底，_____ 是哲学家

苏格拉底	_____ 是哲学家
s	$P(\quad)$

苏格拉底是哲学家
$P(s)$

- 苏格拉底是哲学家
- 苏格拉底，_____ 是哲学家

苏格拉底	_____ 是哲学家
s	$P(\quad)$

苏格拉底是哲学家
$P(s)$

- 苏格拉底是哲学家
- 苏格拉底，_____ 是哲学家

苏格拉底	_____ 是哲学家
s	$P(\quad)$

苏格拉底是哲学家
$P(s)$

- 苏格拉底是哲学家
- 苏格拉底，_____ 是哲学家

苏格拉底	_____ 是哲学家
s	$P(\quad\quad)$

苏格拉底是哲学家
$P(s)$

- 苏格拉底培养柏拉图
- 苏格拉底，_____ 培养_____，柏拉图

苏格拉底	_____ 培养_____	柏拉图
s	$T(\quad,\quad)$	b

苏格拉底培养柏拉图
$T(s,b)$

- 苏格拉底培养柏拉图
- 苏格拉底，_____ 培养_____，柏拉图

苏格拉底	_____ 培养_____	柏拉图
s	$T(\quad , \quad)$	b

苏格拉底培养柏拉图
$T(s, b)$

- 苏格拉底培养柏拉图
- 苏格拉底，_____ 培养_____，柏拉图

苏格拉底	_____ 培养_____	柏拉图
s	$T(\quad,\quad)$	b

苏格拉底培养柏拉图
$T(s,b)$

专名与谓词

- 专名：在某个上下文中，表示独一无二对象的名称。
  - 例子：“苏格拉底”、“柏拉图”、“太阳”、“1”、⋯⋯
- 谓词：表示事物的性质，或表示事物与事物之间的关系的词语。谓词中含有空位，空位数称为该谓词的元数。
  - 一元谓词的例子：“...是哲学家”、“...是人”、“...是白色的”
  - 二元谓词的例子：“...培养 ...”、“...喜欢 ...”、“...小于 ...”

专名与谓词的表示

专名通常用小写字母或数字来表示，而谓词用大写字母或英语单词来表示，注意谓词中的空位用 v、v_1 等来代替。

例子：

- “s”代表专名“苏格拉底”
- “$P(v)$”代表“v 是哲学家”
- “$T(v_1, v_2)$” 代表“v_1 培养 v_2”。

主要内容

- 哲学家都是数学家
- 任何一个哲学家都是数学家
- 任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家

任何 v，	如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v$	$P(v) \to M(v)$

任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v(P(v) \to M(v))$

- 哲学家都是数学家
- 任何一个哲学家都是数学家
- 任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家

任何 v，	如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v$	$P(v) \to M(v)$

任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v(P(v) \to M(v))$

- 哲学家都是数学家
- 任何一个哲学家都是数学家
- 任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家

任何 v，	如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v$	$P(v) \to M(v)$

任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v(P(v) \to M(v))$

- 哲学家都是数学家
- 任何一个哲学家都是数学家
- 任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家

任何 v，	如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v$	$P(v) \to M(v)$

任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v(P(v) \to M(v))$

- 哲学家都是数学家
- 任何一个哲学家都是数学家
- 任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家

任何 v，	如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v$	$P(v) \to M(v)$

任何 v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
$\forall v(P(v) \to M(v))$

- 有的哲学家是数学家
- 存在哲学家，Ta 是数学家
- 存在 v，v 是哲学家，并且 v 是数学家

存在 v，	v 是哲学家，并且 v 是数学家
$\exists v$	$P(v) \land M(v)$

存在 v，v 是哲学家，并且 v 是数学家
$\exists v(P(v) \land M(v))$

- 有的哲学家是数学家
- 存在哲学家，Ta 是数学家
- 存在 v，v 是哲学家，并且 v 是数学家

存在 v，	v 是哲学家，并且 v 是数学家
$\exists v$	$P(v) \wedge M(v)$

存在 v，v 是哲学家，并且 v 是数学家
$\exists v(P(v) \wedge M(v))$

- 有的哲学家是数学家
- 存在哲学家，Ta 是数学家
- 存在 v，v 是哲学家，**并且** v 是数学家

存在 v，	v 是哲学家，**并且** v 是数学家
$\exists v$	$P(v) \wedge M(v)$

存在 v，v 是哲学家，**并且** v 是数学家
$\exists v(P(v) \wedge M(v))$

- 有的哲学家是数学家
- 存在哲学家，Ta 是数学家
- 存在 v，v 是哲学家，**并且** v 是数学家

存在 v，	v 是哲学家，**并且** v 是数学家
$\exists v$	$P(v) \wedge M(v)$

存在 v，v 是哲学家，**并且** v 是数学家
$\exists v(P(v) \wedge M(v))$

- 有的哲学家是数学家
- 存在哲学家，Ta 是数学家
- 存在 v，v 是哲学家，**并且** v 是数学家

存在 v，	v 是哲学家，**并且** v 是数学家
$\exists v$	$P(v) \wedge M(v)$

存在 v，v 是哲学家，**并且** v 是数学家
$\exists v(P(v) \wedge M(v))$

变元与量词

- 任何（一个对象）v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
- 存在（一个对象）v，v 是哲学家，并且 v 是数学家

- v 现在不但在谓词中充当空位，而且还有另一个作用：指代一个对象。v 被称为是一个变元或变项。
- “任何”、“存在”（“有的”）被称为是量词。

变元与量词

- 任何（一个对象）v，如果 v 是哲学家，那么 v 是数学家
- 存在（一个对象）v，v 是哲学家，并且 v 是数学家

- v 现在不但在谓词中充当空位，而且还有另一个作用：指代一个对象。v 被称为是一个变元或变项。
- “任何”、“存在”（“有的”）被称为是量词。

变元与量词

- 变元：用来泛指个体对象的符号，v、v_1、v_2、…
- 量词：
  - 全称量词："任何"、"所有"、"任意"、"全体"等
  - 存在量词："存在"、"有的"、"至少存在一个"等。
- $\forall v(\ldots)$：任何 v，…
- $\exists v(\ldots)$：存在 v，…

变元与量词

- 变元：用来泛指个体对象的符号，v、v_1、v_2、…
- 量词：
  - 全称量词："任何"、"所有"、"任意"、"全体"等
  - 存在量词："存在"、"有的"、"至少存在一个"等。
- $\forall v(\ldots)$：任何 v，…
- $\exists v(\ldots)$：存在 v，…

更复杂的例子

- 苏格拉底培养了所有的哲学家。

改写：

- 任何 v，如果 v 是哲学家，那么苏格拉底培养了 v。

得到命题的形式：

- $\forall v(P(v) \rightarrow T(s,v))$

- 苏格拉底培养了所有的哲学家。

改写：

- 任何 v，如果 v 是哲学家，那么苏格拉底培养了 v。

得到命题的形式：

- $\forall v(P(v) \to T(s, v))$

- 苏格拉底培养了所有的哲学家。

改写：

- 任何 v，如果 v 是哲学家，那么苏格拉底培养了 v。

得到命题的形式：

- $\forall v(P(v) \to T(s, v))$

- 有位哲学家培养了所有的哲学家。

改写：

- 存在 v_1，v_1 是哲学家，并且 v_1 培养了所有的哲学家。
- 存在 v_1，v_1 是哲学家，并且任何 v_2，如果 v_2 是哲学家，那么 v_1 培养了 v_2。

得到命题的形式：

- $\exists v_1(P(v_1) \wedge \forall v_2(P(v_2) \to T(v_1, v_2)))$

- 有位哲学家培养了所有的哲学家。

改写：

- 存在 v_1，v_1 是哲学家，并且 v_1 培养了所有的哲学家。
- 存在 v_1，v_1 是哲学家，并且任何 v_2，如果 v_2 是哲学家，那么 v_1 培养了 v_2。

得到命题的形式：

- $\exists v_1(P(v_1) \land \forall v_2(P(v_2) \to T(v_1, v_2)))$

- 有位哲学家培养了所有的哲学家。

改写：

- 存在 v_1，v_1 是哲学家，并且 v_1 培养了所有的哲学家。
- 存在 v_1，v_1 是哲学家，并且任何 v_2，如果 v_2 是哲学家，那么 v_1 培养了 v_2。

得到命题的形式：

- $\exists v_1(P(v_1) \wedge \forall v_2(P(v_2) \rightarrow T(v_1, v_2)))$

- 有位哲学家培养了所有的哲学家。

改写：

- 存在 v_1，v_1 是哲学家，并且 v_1 培养了所有的哲学家。
- 存在 v_1，v_1 是哲学家，并且任何 v_2，如果 v_2 是哲学家，那么 v_1 培养了 v_2。

得到命题的形式：

- $\exists v_1(P(v_1) \wedge \forall v_2(P(v_2) \rightarrow T(v_1, v_2)))$

- 只有胆怯的人才会丑化或矮化他的对手，勇敢的人都尊重他的对手。

相关符号：

- $C(x)$：（人）x 是胆怯的；$B(x)$：x 是勇敢的
- $U(x,y)$：x 丑化 y；$S(x,y)$：x 矮化 y；
  $R(x,y)$：x 尊重 y；$E(x,y)$：y 是 x 的对手

得到命题形式：

$$\forall v_1(\exists v_2(E(v_1,v_2) \wedge (U(v_1,v_2) \vee S(v_1,v_2))) \to C(v_1)) \\ \wedge \forall v_1(B(v_1) \to \forall v_2(E(v_1,v_2) \to R(v_1,v_2)))$$

- 只有胆怯的人才会丑化或矮化他的对手，勇敢的人都尊重他的对手。

相关符号：

- $C(x)$：（人）x 是胆怯的；$B(x)$：x 是勇敢的
- $U(x,y)$：x 丑化 y；$S(x,y)$：x 矮化 y；
  $R(x,y)$：x 尊重 y；$E(x,y)$：y 是 x 的对手

得到命题形式：

$$\forall v_1(\exists v_2(E(v_1,v_2)\wedge(U(v_1,v_2)\vee S(v_1,v_2)))\to C(v_1))$$
$$\wedge\forall v_1(B(v_1)\to\forall v_2(E(v_1,v_2)\to R(v_1,v_2)))$$

- 只有胆怯的人才会丑化或矮化他的对手，勇敢的人都尊重他的对手。

相关符号：

- $C(x)$：（人）x 是胆怯的；$B(x)$：x 是勇敢的
- $U(x,y)$：x 丑化 y；$S(x,y)$：x 矮化 y；
  $R(x,y)$：x 尊重 y；$E(x,y)$：y 是 x 的对手

得到命题形式：

$$\forall v_1(\exists v_2(E(v_1,v_2)\wedge(U(v_1,v_2)\vee S(v_1,v_2)))\to C(v_1))$$
$$\wedge\,\forall v_1(B(v_1)\to\forall v_2(E(v_1,v_2)\to R(v_1,v_2)))$$

- 只有胆怯的人才会丑化或矮化他的对手，勇敢的人都尊重他的对手。

相关符号：

- $C(x)$：（人）x 是胆怯的；$B(x)$：x 是勇敢的
- $U(x,y)$：x 丑化 y；$S(x,y)$：x 矮化 y；
  $R(x,y)$：x 尊重 y；$E(x,y)$：y 是 x 的对手

得到命题形式：

$$\forall v_1(\exists v_2(E(v_1,v_2)\wedge(U(v_1,v_2)\vee S(v_1,v_2)))\to C(v_1))$$
$$\wedge\ \forall v_1(B(v_1)\to\forall v_2(E(v_1,v_2)\to R(v_1,v_2)))$$

主要内容

1. 更多的命题否定例子
2. 专名与谓词
3. 变元与量词
4. 一阶逻辑的劳模

一阶逻辑

一阶逻辑：一种新的符号体系，提供了分析简单命题的新方法，同时又融合了命题逻辑。

- 大部分命题都可在一阶逻辑中得到最精当的形式化
- 不但是其它逻辑的理论基础，而且是理论计算机科学的逻辑基础，被广泛应用于数学、计算机、哲学、语言学

小史

- 1660's：莱布尼兹提出"思维演算"、"普遍语言"的构想，一阶逻辑的思想基础
- 1879 年：弗雷格的《概念文字……》（Begriffsschrift）出版，奠定了一阶逻辑的基础
- 1900 年：希尔伯特 23 个数学问题 No. 2：算术理论一致性的逻辑证明
- 1910 – 1913 年：罗素（与怀特海）《数学原理》（Principia Mathematica）出版，一阶逻辑（及更高阶逻辑）的集大成

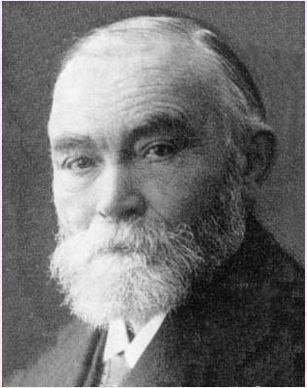
- 1928 年：希尔伯特（与阿克曼）《理论逻辑基础》出版，标准逻辑教科书，完全性问题、判定问题
- 1929 年：哥德尔博士论文，完全性定理（完全性问题的肯定回答）
- 1931 年：哥德尔的《论 < 数学原理 > 及有关系统中的形式不可判定命题》发表，不完全性定理（希尔伯特问题 No. 2 的否定性回答），现代逻辑的巅峰之作
- 1936 年：图灵提出图灵机——现代计算机的理论模型，开创了信息时代，判定问题的否定回答

Gottfried Wilhelm von Leibniz（莱布尼茨）

- Born: 1 July 1646 in Leipzig, Saxony (now Germany)
- Died: 14 Nov 1716 in Hannover, Hanover (now Germany)

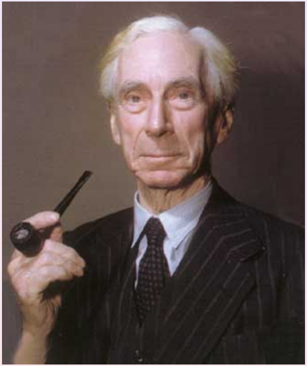
Friedrich Ludwig Gottlob Frege（弗雷格）

- Born: 8 Nov 1848 in Wismar, Mecklenburg-Schwerin (now Germany)
- Died: 26 July 1925 in Bad Kleinen, Germany



Bertrand Arthur William Russell（罗素）

- Born: 18 May 1872 in Ravenscroft, Trelleck, Monmouthshire, Wales
- Died: 2 Feb 1970 in Penrhyndeudraeth, Merioneth, Wales



David Hilbert（希尔伯特）

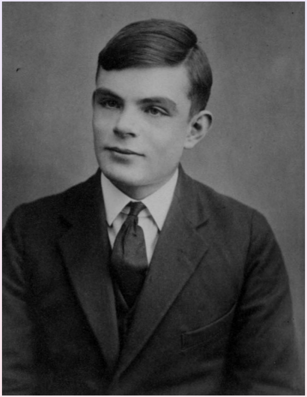
- Born: 23 Jan 1862 in Königsberg, Prussia (now Kaliningrad, Russia)
- Died: 14 Feb 1943 in Göttingen, Germany

Kurt Gödel（哥德尔）

- Born: 28 April 1906 in Brünn, Austria-Hungary (now Brno, Czech Republic)
- Died: 14 Jan 1978 in Princeton, New Jersey, USA

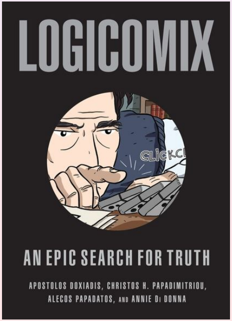
Alan Turing（图灵）

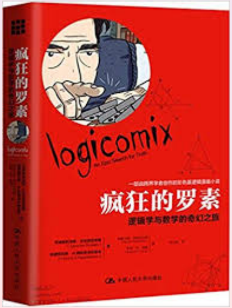
- Born: 23 June 1912 in Maida Vale, London, UK
- Died: 7 June 1954 in Wilmslow, Cheshire, UK



推荐阅读

- Apostolos Doxiadis, Christos Papadimitriou, *Logicomix: An epic search for truth*, London: Bloomsbury Publishing, 2009.
- 阿波斯托洛斯・佐克西亚季斯, 赫里斯托斯・帕帕季米特里乌 (著), 张立英 (译), 《疯狂的罗素：逻辑学与数学的奇幻之旅》, 北京：中国人民大学出版社, 2018.





Thanks for your attention!

Q & A