一阶逻辑的解析树

熊　明
mingshone@163.com

South China Normal University

主要内容

1. 再论有效
2. 解析树

主要内容

1. 再论有效
2. 解析树

推理及其形式

推理

$$\frac{\text{苏格拉底是人} \quad \text{人都是会死的}}{\text{所以，苏格拉底是会死的}}$$

苏格拉底是人
人都是会死的
所以，苏格拉底是会死的

欧几里得是数学家
数学家都是聪明的
所以，欧几里得是聪明的

推理形式（在亚里士多德逻辑中）

S 是 M
M 都是 D
S 是 D

推理及其形式

推理

$$\frac{\text{苏格拉底是人} \quad \text{人都是会死的}}{\text{所以，苏格拉底是会死的}}$$

$$\frac{\text{欧几里得是数学家} \quad \text{数学家都是聪明的}}{\text{所以，欧几里得是聪明的}}$$

推理形式（在亚里士多德逻辑中）

$$\frac{S\ \text{是}\ M \quad M\ \text{都是}\ D}{S\ \text{是}\ D}$$

推理及其形式

推理

$$\frac{\begin{array}{c}\text{苏格拉底是人}\\ \text{人都是会死的}\end{array}}{\text{所以，苏格拉底是会死的}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{欧几里得是数学家}\\ \text{数学家都是聪明的}\end{array}}{\text{所以，欧几里得是聪明的}}$$

推理形式（在一阶逻辑中）

$$\frac{\begin{array}{c}M(s)\\ \forall v(M(v)\to D(v))\end{array}}{D(s)}$$

推理及其形式

推理

$$\frac{\begin{array}{c}\text{苏格拉底是人}\\\text{人都是会死的}\end{array}}{\text{所以，苏格拉底是会死的}}$$

$$\frac{\begin{array}{c}\text{欧几里得是数学家}\\\text{数学家都是聪明的}\end{array}}{\text{所以，欧几里得是聪明的}}$$

推理形式（在一阶逻辑中）

$$\frac{\begin{array}{c}M(s)\\\forall v(M(v)\to D(v))\end{array}}{D(s)}$$

推理及其形式

推理

- 麦卡锡：所有的赤党分子都攻击国会议员，你攻击国会议员，所以，你是赤党分子。
- 斯穆里安：所有的鸭子都吃白菜，你也吃白菜，所以，你是只鸭子。

推理形式

$$\frac{\begin{array}{c}\forall v_1(C(v_1) \to \exists v_2(G(v_2) \land E(v_1, v_2))) \\ \exists v_2(G(v_2) \land E(a, v_2))\end{array}}{C(a)}$$

推理形式的解释

推理形式

$$\frac{\forall v_1(C(v_1) \to \exists v_2(G(v_2) \land E(v_1, v_2))) \quad \exists v_2(G(v_2) \land E(a, v_2))}{C(a)}$$

麦卡锡的解释

- 个体的范围（个体域、论域）：所有的人
- a 解释为"斯穆里安"
- $C(v)$ 解释为"v 是赤党分子"
- $G(v)$ 解释为"v 是国会议员"
- $E(v_1, v_2)$ 解释为"v_1 攻击 v_2"

推理形式的解释

推理形式

$$\frac{\begin{array}{c}\forall v_1(C(v_1) \rightarrow \exists v_2(G(v_2) \wedge E(v_1, v_2))) \\ \exists v_2(G(v_2) \wedge E(a, v_2))\end{array}}{C(a)}$$

麦卡锡的解释

- 个体的范围（个体域、论域）：所有的人
- a 解释为“斯穆里安”
- $C(v)$ 解释为“v 是赤党分子”
- $G(v)$ 解释为“v 是国会议员”
- $E(v_1, v_2)$ 解释为“v_1 攻击 v_2”

推理形式的解释

推理形式

$$\frac{\begin{array}{c}\forall v_1(C(v_1) \rightarrow \exists v_2(G(v_2) \wedge E(v_1, v_2))) \\ \exists v_2(G(v_2) \wedge E(a, v_2))\end{array}}{C(a)}$$

斯穆里安的解释

- 个体域：所有的生物
- a 解释为“麦卡锡”
- $C(v)$ 解释为“v 是鸭子”
- $G(v)$ 解释为“v 是白菜”
- $E(v_1, v_2)$ 解释为“v_1 吃 v_2”

推理形式的解释

推理形式

$$\frac{\forall v_1(C(v_1) \to \exists v_2(G(v_2) \land E(v_1, v_2))) \quad \exists v_2(G(v_2) \land E(a, v_2))}{C(a)}$$

斯穆里安的解释

- 个体域：所有的生物
- a 解释为“麦卡锡”
- $C(v)$ 解释为“v 是鸭子”
- $G(v)$ 解释为“v 是白菜”
- $E(v_1, v_2)$ 解释为“v_1 吃 v_2”

回顾：推理有效性的一般规定

如果推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

满足：不存在**情况**使得其前提都为真，而结论为假，那么就称这个推理形式是**有效的**。

一阶逻辑中的有效性

如果推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

满足：不存在**一种解释**使得其前提都为真，而结论为假，那么就称这个推理形式是**有效的**。

有效式

如果无前提的推理形式：

$$\frac{}{B}$$

是有效的，就称公式 B 是**有效的**。换言之，如果 B 在任何解释下都为真，那么 B 就是有效的。

有效性的判定

- 要断定一个推理形式是无效的，只需要给出一种解释，使得在这个解释下，推理形式的前提为真，而结论为假。
- ”解释”有时又被看做是一种“模型”，上述解释可看做是证明推理形式无效的例子，因此，这种解释又被称为“反模型”。

例子

推理形式

$$\frac{\begin{array}{c}\forall v_1(C(v_1) \to \exists v_2(G(v_2) \wedge E(v_1, v_2))) \\ \exists v_2(G(v_2) \wedge E(a, v_2))\end{array}}{C(a)}$$

斯穆里安的解释

- 个体域：所有的生物
- a 解释为“麦卡锡”
- $C(v)$ 解释为“v 是鸭子”
- $G(v)$ 解释为“v 是白菜”
- $E(v_1, v_2)$ 解释为“v_1 吃 v_2”

在上述解释下，推理形式的前提为真，而结论为假，所以此推理形式不是有效式。

例子

推理形式

$$\frac{\forall v_1(C(v_1) \to \exists v_2(G(v_2) \wedge E(v_1, v_2))) \quad \exists v_2(G(v_2) \wedge E(a, v_2))}{C(a)}$$

斯穆里安的解释

- 个体域：所有的生物
- a 解释为“麦卡锡”
- $C(v)$ 解释为“v 是鸭子”
- $G(v)$ 解释为“v 是白菜”
- $E(v_1, v_2)$ 解释为“v_1 吃 v_2”

在上述解释下，推理形式的前提为真，而结论为假，所以此推理形式不是有效式。

例子

推理形式

$$\frac{\forall v_1(C(v_1) \to \exists v_2(G(v_2) \wedge E(v_1, v_2))) \quad \exists v_2(G(v_2) \wedge E(a, v_2))}{C(a)}$$

斯穆里安的解释

- 个体域：所有的生物
- a 解释为“麦卡锡”
- $C(v)$ 解释为“v 是鸭子”
- $G(v)$ 解释为“v 是白菜”
- $E(v_1, v_2)$ 解释为“v_1 吃 v_2”

在上述解释下，推理形式的前提为真，而结论为假，所以此推理形式不是有效式。

例子

公式

$$\exists v P(v) \rightarrow \forall v P(v)$$

解释

- 个体域：自然数
- $P(v)$ 解释为“v 是质数”

在上述解释下，公式为假，所以公式不是有效式。

例子

公式

$$\exists v P(v) \to \forall v P(v)$$

解释

- 个体域：自然数
- $P(v)$ 解释为“v 是质数”

在上述解释下，公式为假，所以公式不是有效式。

例子

公式

$$\exists v P(v) \to \forall v P(v)$$

解释

- 个体域：自然数
- $P(v)$ 解释为“v 是质数”

在上述解释下，公式为假，所以公式不是有效式。

- $\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \rightarrow \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$

第一个解释

- 如果每个（实）数都小于某个数，那么存在一个大于每个数的数。

第二个解释

- 如果每个人都喜欢某个人，那么存在一个人，每个人都喜欢Ta。

- $\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$

第一个解释

- 如果每个（实）数都小于某个数，那么存在一个大于每个数的数。

第二个解释

- 如果每个人都喜欢某个人，那么存在一个人，每个人都喜欢Ta。

- $\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$

第一个解释

- 如果每个（实）数都小于某个数，那么存在一个大于每个数的数。

第二个解释

- 如果每个人都喜欢某个人，那么存在一个人，每个人都喜欢Ta。

一些“自明”的有效式

- 有效的推理形式

$$\frac{\begin{array}{c} M(s) \\ \forall v(M(v) \rightarrow D(v)) \end{array}}{D(s)}$$

- 有效的公式

(1) $D(s) \vee \neg D(s)$

(2) $\forall v(D(v) \vee \neg D(v))$

(3) $\forall v D(v) \rightarrow \exists v D(v)$

可“直观”的有效式

- $\neg\forall v A(v) \leftrightarrow \exists v \neg A(v)$
- $\forall v(A(v) \wedge B(v)) \leftrightarrow \forall v A(v) \wedge \forall v B(v)$
- $\exists v(A(v) \vee B(v)) \leftrightarrow \exists v A(v) \vee \exists v B(v)$

反直观的有效式

$$\exists v(D(v) \to \forall v D(v))$$

主要内容

一阶逻辑中的解析树

- 把命题逻辑的解析树方法进行扩展，可用于判定一阶逻辑中推理形式的有效性。
- 需要说明如何解析全称式、存在式及其它们的否定。

例：$\forall v P(v) \to P(a)$ 是否有效

$$
\begin{array}{c}
\neg(\forall v P(v) \to P(a)) \\
| \\
\forall v P(v), \neg P(a) \\
| \\
P(a) \\
| \\
\times
\end{array}
$$

结论：$\forall v(P(v)) \to P(a)$ 是有效式。

规则

$$\begin{array}{c}\forall x\ A\\ |\\ \vdots\\ |\\ A(a/x)\end{array}$$

需要更仔细的说明!

例：$\forall v(P(v) \wedge \exists v\, Q(v)) \to P(a)$ 是否有效

$$\neg(\forall v(P(v) \wedge \exists v\, Q(v)) \to P(a))$$
$$|$$
$$\forall v(P(v) \wedge \exists v\, Q(v)), \neg P(a)$$
$$|$$
$$P(a) \wedge \exists v\, Q(v)$$
$$|$$
$$P(a), \exists v\, Q(v)$$
$$|$$
$$\times$$

结论：$\forall v(P(v) \wedge \exists v\, Q(v)) \to P(a)$ 是有效式。

变元的自由出现

- 在形如 $\forall v A$ 的公式中，A 称为 $\forall v$ 的辖域。
- 在形如 $\exists v A$ 的公式中，A 称为 $\exists v$ 的辖域。
- 在一个公式中，变元 v 的出现既没有位于 $\forall$ 或 $\exists$ 之后，又没有位于某个 $\forall v$ 或 $\exists v$ 的辖域中，那么就称变元的这处出现是**自由的**，否则称为是约束的。

$$P(v) \land \exists v\, Q(v)$$

$P($	v	$) \land \exists$	v	$Q($	v	$)$
	自		约		约	

变元的自由出现

- 在形如 $\forall v A$ 的公式中，A 称为 $\forall v$ 的辖域。
- 在形如 $\exists v A$ 的公式中，A 称为 $\exists v$ 的辖域。
- 在一个公式中，变元 v 的出现既没有位于 $\forall$ 或 $\exists$ 之后，又没有位于某个 $\forall v$ 或 $\exists v$ 的辖域中，那么就称变元的这处出现是**自由的**，否则称为是约束的。

$$P(v) \wedge \exists v\, Q(v)$$

$$\underset{\text{自}}{P(v)} \wedge \exists \underset{\text{约}}{v}\, Q(\underset{\text{约}}{v})$$

变元的自由出现

- 在形如 $\forall vA$ 的公式中，A 称为 $\forall v$ 的辖域。
- 在形如 $\exists vA$ 的公式中，A 称为 $\exists v$ 的辖域。
- 在一个公式中，变元 v 的出现既没有位于 $\forall$ 或 $\exists$ 之后，又没有位于某个 $\forall v$ 或 $\exists v$ 的辖域中，那么就称变元的这处出现是**自由的**，否则称为是约束的。

$$P(v) \land \exists v\, Q(v)$$

$$\begin{array}{ccccccccc} P(& v &) \land \exists & v & Q(& v &) \\ & \text{自} & & \text{约} & & \text{约} & \end{array}$$

Quiz

指出下列公式中变元的自由出现:

- $\forall v_1 P(v_1) \to \exists v_2 (Q(v_2) \land R(v_1, v_2))$
- $\forall v_1 \exists v_2 (P(v_1) \land Q(v_2) \to R(v_1, v_2))$

公式的代入

$A(a/x)$ 表示用常元 a 去替换公式 A 中变元 x 的所有**自由出现**，这种对公式的变形一般称为在 A 中用 a **代入** x。

$$\begin{array}{lcl} A & = & P(v) \wedge \exists v\, Q(v) \\ A(a/v) & = & P(a) \wedge \exists v\, Q(v) \end{array}$$

公式的代入

$A(a/x)$ 表示用常元 a 去替换公式 A 中变元 x 的所有**自由出现**，这种对公式的变形一般称为在 A 中用 a **代入** x。

$$\begin{array}{rcl} A & = & P(\ v\ )\wedge\exists\ v\ \ Q(\ v\ ) \\ A(a/v) & = & P(\ a\ )\wedge\exists\ v\ \ Q(\ v\ ) \end{array}$$

例子

设公式 $A = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1\, P(v_1) \lor P(v_2)$

- $A(a/v_1) = \exists v_2\, R(a, v_2) \to \forall v_1\, P(v_1) \lor P(v_2)$
- $A(a/v_2) = \exists v_2\, R(v_1, v_2) \to \forall v_1\, P(v_1) \lor P(a)$

例子

设公式 $A = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$

- $A(a/v_1) = \exists v_2 R(a, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$
- $A(a/v_2) = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(a)$

例子

设公式 $A = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1\, P(v_1) \vee P(v_2)$

- $A(a/v_1) = \exists v_2\, R(a, v_2) \to \forall v_1\, P(v_1) \vee P(v_2)$
- $A(a/v_2) = \exists v_2\, R(v_1, v_2) \to \forall v_1\, P(v_1) \vee P(a)$

解析的例子

$$\forall v(A(v) \to B(v)) \to (\forall v A(v) \to \exists v B(v))$$

解析全称式、存在式的否定

$$\begin{array}{c} \forall x\, A \\ | \\ \vdots \\ | \\ A(a/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\exists x\, A \\ | \\ \vdots \\ | \\ \neg A(a/x) \end{array}$$

其中，a 可以是任何常元。

注：$\neg\exists x\, A$ 与 $\forall x \neg\, A$ 是逻辑等价的。

例：$\exists v P(v) \to P(a)$ 是否有效

$$\neg(\exists v P(v) \to P(a))$$
$$|$$
$$\exists v P(v), \neg P(a)$$
$$|$$
$$P(a)$$
$$|$$
$$\times$$

在这个例子中，用了一个已经出现的常元的 a，从 $\exists v(P(v)$ 得到 $P(a)$。因之前已有 $\neg P(a)$，这就产生了矛盾。然而，这个矛盾是人为产生的，并不是逻辑上导出的。**上述解析是错误的**。事实上，上一例子正确的解析是不会导出矛盾的，因为 $\exists v P(v) \to P(a)$ 并不是有效式。

解析存在式、全称式的否定

$$\begin{array}{c} \exists x\, A \\ | \\ \vdots \\ | \\ A(b/x) \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} \neg\forall x\, A \\ | \\ \vdots \\ | \\ \neg A(b/x) \end{array}$$

其中，b 为**新常元**，即到此为止从未在解析树的构造中使用过的常元。

注：$\neg\forall x\, A$ 与 $\exists x \neg\, A$ 是逻辑等价的。

例：$\exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2)$ 是否有效

$$\neg(\exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2))$$

$$\exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2), \neg\forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2)$$

$$\forall v_2 R(a, v_2)$$

$$\neg\exists v_1 R(v_1, b)$$

$$R(a, b)$$

$$\neg R(a, b)$$

$$\times$$

例：$\exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2)$ 是否有效

$$\neg(\exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2))$$

$$|$$

$$\exists v_1 \forall v_2 R(v_1, v_2), \neg\forall v_2 \exists v_1 R(v_1, v_2)$$

$$|$$

$$\forall v_2 R(a, v_2)$$

$$|$$

$$\neg\exists v_1 R(v_1, b)$$

$$|$$

$$R(a, b)$$

$$|$$

$$\neg R(a, b)$$

$$|$$

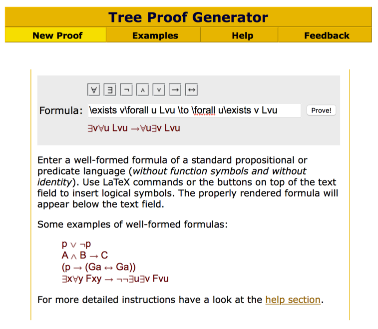
$$\times$$

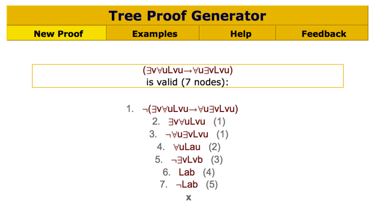
解析树的算法

解析树同样可通过程序产生出来。

点击：Tree Proof Generator

例子：





例：$\exists v(P(v) \to \forall v P(v))$ 是否有效

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists v(P(v) \to \forall v P(v))) \\
| \\
\neg(P(a) \to \forall v P(v))) \\
| \\
P(a), \neg\forall v P(v)) \\
| \\
\neg P(b) \\
| \\
\neg(P(b) \to \forall v P(v))) \\
| \\
P(b), \neg\forall v P(v)) \\
| \\
\times
\end{array}
$$

例：$\exists v(P(v) \to \forall v P(v))$ 是否有效

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists v(P(v) \to \forall v P(v))) \\
| \\
\neg(P(a) \to \forall v P(v))) \\
| \\
P(a), \neg\forall v P(v)) \\
| \\
\neg P(b) \\
| \\
\neg(P(b) \to \forall v P(v))) \\
| \\
P(b), \neg\forall v P(v)) \\
| \\
\times
\end{array}
$$

例：$\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \to \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2))$ 是否有效

$$\neg(\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \to \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2)))$$

$$|$$

$$\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)), \neg \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2))$$

$$|$$

$$\exists v_2 (R(a, v_2))$$

$$|$$

$$R(a, b)$$

$$|$$

$$\neg \forall v_1 (R(v_1, b))$$

$$|$$

$$\neg R(c, b)$$

$$|$$

$$\exists v_2 (R(c, v_2))$$

例：$\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \to \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2))$ 是否有效

$$\neg(\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \to \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2)))$$

$$|$$

$$\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)), \neg\exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2))$$

$$|$$

$$\exists v_2 (R(a, v_2))$$

$$|$$

$$R(a, b)$$

$$|$$

$$\neg\forall v_1 (R(v_1, b))$$

$$|$$

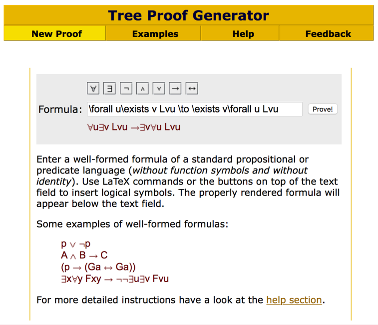
$$\neg R(c, b)$$

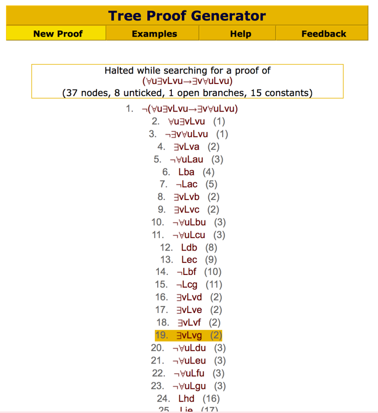
$$|$$

$$\exists v_2 (R(c, v_2))$$

上一例子的机器执行

点击：Tree Proof Generator





能行判定

在**命题逻辑**中，对任意公式，可把其解析树扩展为饱和的，然后做出判定：

- 如果此解析树是闭的，那么原公式是有效的；
- 如果此解析树不是闭的，那么原公式是无效的。

在这个意义上，命题逻辑中的解析树是**能行判定方法**。

能行判定

在**命题逻辑**中，对任意公式，可把其解析树扩展为饱和的，然后做出判定：

- 如果此解析树是闭的，那么原公式是有效的；
- 如果此解析树不是闭的，那么原公式是无效的。

在这个意义上，命题逻辑中的解析树是**能行判定方法**。

半能行判定

而在一阶逻辑中，对于一个公式，其解析树没有饱和概念（或饱和概念无法用于判定有效性）！

- 仅当原公式是有效时，解析树的生成过程最终会终止，并得到一个闭解析树，由此可判定原公式是有效的；
- 公式的解析树有可能永不终止，此时无法做出判定！

在这个意义上，一阶逻辑中的解析树是**半能行判定方法**。

半能行判定

而在一阶逻辑中，对于一个公式，其解析树没有饱和概念（或饱和概念无法用于判定有效性）!

- 仅当原公式是有效时，解析树的生成过程最终会终止，并得到一个闭解析树，由此可判定原公式是有效的；
- 公式的解析树有可能永不终止，此时无法做出判定!

在这个意义上，一阶逻辑中的解析树是**半能行判定方法**。

半能行判定

而在一阶逻辑中，对于一个公式，其解析树没有饱和概念（或饱和概念无法用于判定有效性）!

- 仅当原公式是有效时，解析树的生成过程最终会终止，并得到一个闭解析树，由此可判定原公式是有效的；
- 公式的解析树有可能永不终止，此时无法做出判定!

在这个意义上，一阶逻辑中的解析树是**半能行判定方法**。

解析树的启发作用

如果发现公式的解析树始终不闭，那么可以猜测原公式不是有效的。有时候，可通过观察已生成的解析树，尝试构造原公式的反模型。

例：$\exists v P(v) \to P(a)$ 是否有效

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists v P(v) \to P(a)) \\
| \\
\exists v P(v), \neg P(a) \\
| \\
P(b)
\end{array}
$$

构造解释如下：

- 个体域：$\{a, b\}$。
- $P(v)$ 解释为某个性质，使得 a 不具有这种性质，但 b 具有这种性质。

在上一解释下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

例：$\exists v P(v) \to P(a)$ 是否有效

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists v P(v) \to P(a)) \\
| \\
\exists v P(v), \neg P(a) \\
| \\
P(b)
\end{array}
$$

构造解释如下：

- 个体域：$\{a, b\}$。
- $P(v)$ 解释为某个性质，使得 a 不具有这种性质，但 b 具有这种性质。

在上一解释下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

例：$\exists v P(v) \to P(a)$ 是否有效

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists v P(v) \to P(a)) \\
| \\
\exists v P(v), \neg P(a) \\
| \\
P(b)
\end{array}
$$

构造解释如下：

- 个体域：$\{a, b\}$。
- $P(v)$ 解释为某个性质，使得 a 不具有这种性质，但 b 具有这种性质。

在上一解释下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

例：$\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \rightarrow \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ 是否有效

$\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \rightarrow \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ 的反模型 构造解释如下：

- 个体域：$\{a, b\}$。
- $R(v_1, v_2)$ 解释为某个关系，使得 $R(a, b)$、$R(b, a)$ 都成立，但 $R(a, a)$、$R(b, b)$。

在上一解释下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

例：$\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ 是否有效

$\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ 的反模型 构造解释如下：

- 个体域：$\{a, b\}$。
- $R(v_1, v_2)$ 解释为某个关系，使得 $R(a, b)$、$R(b, a)$ 都成立，但 $R(a, a)$、$R(b, b)$。

在上一解释下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

例：$\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ 是否有效

$\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ 的反模型 构造解释如下：

- 个体域：$\{a, b\}$。
- $R(v_1, v_2)$ 解释为某个关系，使得 $R(a, b)$、$R(b, a)$ 都成立，但 $R(a, a)$、$R(b, b)$。

在上一解释下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

Thanks for your attention!

Q & A