一阶逻辑

高贝贝

哲学与社会发展学院

1344220150@qq.com

- 有人爱每个人
- 所以，每个人都有人爱

有效吗?

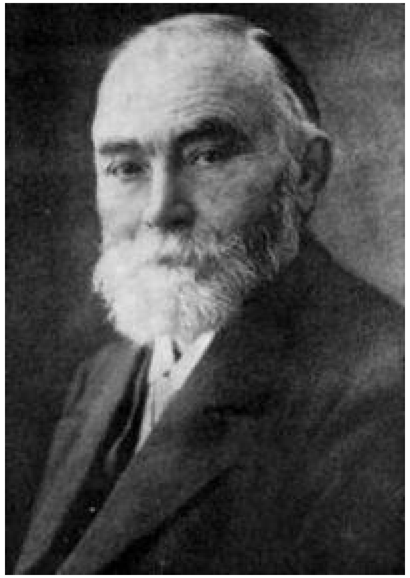
- **命题逻辑主要研究复合命题及其推理。**
- 在命题逻辑中，真正重要的是复合命题的逻辑性质，以及由这种性质所决定的*复合命题与其支命题之间*以及*复合命题相互之间*的逻辑关系。**这是由命题联结词决定的。**
- 命题逻辑不再对简单命题进行分析。

❖**一阶逻辑：**一种新的符号体系，提供了分析简单命题的新方法，同时又融合了命题逻辑。

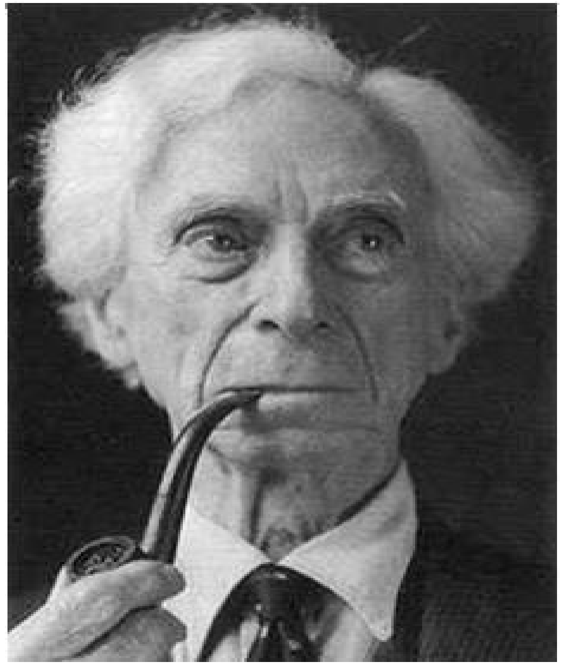
❖一阶逻辑把断定某个对象是否具有某种性质这类命题作为最简单的逻辑结构之一，并把这种结构套用到其他更复杂的命题上去。

一阶逻辑的创立

- 一阶逻辑开山人： [德]弗雷格《概念文字》
- 现代逻辑诞生标志：[英]怀特海与罗素合著《数学原理》



Frege，1848-1925



Russell，1872-1970

一阶逻辑

- 个体词、谓词、量词
- 一阶语言
- 命题形式化
- 更复杂的形式表达

❖个体词和谓词

- 简单命题从内容上来看：
- 1）表达事物具有或不具有某种性质；
- 2）表达事物与事物之间具有或不具有某种关系。
- 苏格拉底是哲学家
- 苏格拉底培养了柏拉图

个体词

- **个体词**就是表示个体的词。自然语言中最容易识别的个体词是**专名**。
- **专名**：表示独一无二对象的名称。常见的**人名**、**地名**等都是专名。
- **例如：苏格拉底、柏拉图、北京、广州等等。**
- 我们用符号代表专名，这样的符号我们称之为**个体常元**，简称**常元**。

通常用小写a、b、c...表示。

- **苏格拉底是哲学家**：a是哲学家
- **苏格拉底培养了柏拉图**：a培养了b

- 苏格拉底是哲学家
- 鲁迅是文学家
- 金岳霖是逻辑学家

- 有的人是哲学家
- 有的人是文学家
- 有的人是逻辑学家
- 所有乌鸦都是黑的

- 不同于专名，还有一些不是特指某个对象而是泛指某些对象的个体词。
- 表达该类用于泛指个体对象的符号，我们称之为**个体变元**，简称**变元**。通常用小写字母x、y、z、v、v_1 …表示。

是哲学家

苏格拉底 是哲学家 空位

所指对象是特定的，不变的，相当于数学中的常元。

“哲学家”的指称对象是笼统的，可变的，相当于数学的变元。

“哲学家”与系词“是”组合起来构成了另一个语言要素：

饱和的语言要素 + 不饱和的语言要素

有空位的语言要素

形成语句

谓词

- **谓词：**是表示一定事物具有的**性质**或一定事物之间存在**关系**的语词。
- **谓词中含有空位，空位数称为该谓词的元数。**
- **一元谓词**的例子：“...是哲学家”、“...是人”、“...是白色的”
- **二元谓词**的例子：“...培养...”、“...喜欢...”、“...小于...”
- 谓词符号用大写的**F,G,H,R……**表示。
- 注意谓词中的空位用**个体词填充**（a、b、x、y、z、v、v_1 ...）等来代替。

- 谓词： 表示对象具有的属性或特征，有空位，这样的词是“属性词”。

  表示个体之间的关系，有空位，

  如“。。。大于。。。”，”。。。在。。。之间”等等，这样的词是“关系词”

> - 带有空位的不饱和的语言成分，与个体词进行结合就是一个完整的语句。
> - 个体词的数目决定谓词的元数：
>   属性词是一元的
>   “。。。大于。。。”是二元的
>   “。。。在。。。与。。。之间”是三元的

- 人是哲学家
- 人是文学家
- 人是逻辑学家
- 花是红的

- 有的人是哲学家
- 有的人是文学家
- 有的人是逻辑学家

“有的”，“至少存在一个”

- 所有花都是红的

“所有”，“任何一个”

量词

- **量词**就是表示数量的语词。
- **全称量词**：“任何”、“所有”、“任意”、“全体”等
- **存在量词**：“存在”、“有的”、“至少存在一个”等。
- $\forall v$（…）：任何v，⋯
- $\exists v$（…）：存在v，⋯
- 注意：省略号位置被称为$\forall v$（…）中$\forall v$的**辖域**或$\exists v$（…）中$\exists v$的辖域

一阶语言

一阶语言

- 个体变元：x、y、z、v、v_1
- 联结词：¬、∨、∧、→。
- 量词：∀、∃
- 辅助符：左括弧（、右括弧）。
- 谓词：表示谓词的符号：如P，G，F，R等等
- 个体常元：表示个体常元的符号：如a、b、c等等

- **初始符号**
- 在初始符号中，个体变元、联结词、量词、辅助符统称为**逻辑符号**，其余符号称为**非逻辑符号**。

谓词
个体常元

确定某个逻辑系统用什么样的谓词语言需要确定两样东西：

1. 确定要讨论的谓词和个体常元

2. 确定谓词的元数

因此，我们可以设，某个逻辑系统里有二元谓词P，有三元谓词R，有个体常项a，b，c

那么，我们可以说，该逻辑系统以（P^2，R^3，a，b，c）为其谓词语言。

形成规则

- 如果t_1，t_2，t_3，…，t_n是个体变元或常元，P是该一阶语言中的n元谓词，那么P（t_1，t_2，t_3，… ，t_n)是公式；
- 如果 A是公式，那么 $\neg A$也是；
- 如果 A和 B是公式，那么 $A \wedge$B、 $A \vee$B、 $A \rightarrow$B 是公式。
- 如果 A是公式，那么对任何个体变元 x， $\forall xA$， $\exists xA$ 也是公式。

原子公式 $P(t_1, t_2, t_3, \cdots, t_n)$

全称公式 $\forall x A$

特称公式 $\exists x A$

- **量词的辖域**
- **量词的辖域是指在量词后面紧随的第一个完整公式。**
- **例如：**
- $\forall x\,(F(x) \rightarrow G(x))$
- $(F(x) \rightarrow G(x))$
- $\exists x F(x) \wedge \forall y F(y)$
- $\exists x\,(F(x) \wedge \forall y\,(G(y) \rightarrow F(y)))$

- **“一个公式中所出现的变元”和“一个变元在一个公式中的出现”**
- $\exists x\ (F\ (x)\ \land \forall y\ (G\ (y)\ \rightarrow S\ (z\ )\ )\ )$
- 在公式中，总共出现了三个不同的个体变元 x、 y、z。
- 但是x出现了两次， y出现了两次、z只出现一次。

- 一个变元的某一次出现，如果处于量词的辖域之内，那么该变元的出现是“**约束出现**”，否则叫做“**自由出现**”。
- $\exists x\,(F(x) \land \forall y\,(G(y) \to F(y)))$
- **x和y的出现是受约束的**
- $\exists x\,(F(x) \land \forall y\,(G(y) \to S(z)))$
- **x和y的出现是受约束的，z 不受约束**

- 一个变元，如果在一个公式中有约束出现，则称它是“**约束变元**”
- 如果在一个公式中有自由出现，则称它是“**自由变元**”。
- 显然地，一个公式中，一个个体变元可以既是约束变元又是自由变元。
- 一个含有至少一个自由变元的公式，叫做**开公式**。
- 一个不含任何自由变元的公式，叫做**闭公式**。

命题的形式化

- **苏格拉底是哲学家**
- 苏格拉底，_________是哲学家

苏格拉底	_________是哲学家
S	P( )
P(S)	

- 鲁迅不是哲学家
- 结构：并非“鲁迅是哲学家”
- “鲁迅是哲学家”
- “鲁迅” + “______是哲学家”
- 引入符号：a、P(…)
- 分析结果：$\neg P(a)$

- 鲁迅爱许广平
- 鲁迅，（　　）爱（　　），许广平

鲁迅	（　　）爱（　　）	许广平
a	L（　，　）	b
L(a，b)		

全称命题结构分析

SAP

- 所有的哲学家都是数学家

结构分析

- “任意x，如果x是哲学家，那么x是数学家”

引入符号

- $\forall x$表示“任意x”，P(…)表示“…是哲学家”，M(…)表示“…是数学家”

分析结果

- $\forall x\ (P(x) \rightarrow M(x))$

特称命题结构分析

SIP

- 有的哲学家是数学家

结构分析

- 存在哲学家，Ta是数学家

“存在x，x是哲学家，并且x是数学家”

引入符号

- $\exists x$表示“存在x”， P(…) 表示“…是哲学家”，M(…)表示“…是数学家”

分析结果

- $\exists x\ (P(x) \wedge M(x))$

全称命题结构分析

SEP

- 任意偶数都不是奇数

结构分析

- “任意x，如果x是偶数，那么x不是奇数”

引入符号

- $\forall x$表示“任意x”，E(...)表示“...是偶数”，O(...)表示“...是奇数”

分析结果

- $\forall x(E(x) \rightarrow \neg O(x))$

特称命题结构分析

SOP

- 有的阔叶植物不是落叶的

结构分析

- 存在阔叶植物，Ta不是落叶的
- “存在x，x是阔叶植物，并且x不是落叶的”

引入符号

- $\exists x$表示“存在x”，S(…)表示“…是阔叶植物”，P(…)表示“…是落叶的”

分析结果

- $\exists x(S(x) \land \neg P(x))$

- 苏格拉底是人，
- 人都是会死的，
- 所以，苏格拉底是会死的。

❖ 三段论的谓词逻辑表达形式

苏格拉底是人，	$P(c)$
人都是会死的，	$\forall x\,(P(x)\rightarrow M(x))$
所以，苏格拉底是会死的。	$M(c)$

练习题

- 所有金属都是有光泽的
- 所有大学生既有知识又有修养
- 好书或者能怡情或者能益智
- 所有动物和植物都需要水和空气

❖复杂命题的分析与表达

- 亚里士多德爱柏拉图，但柏拉图不爱亚里士多德
- L（a,b）∧¬L(b,a)
- 每个哲学家都喜欢苏格拉底。
- 任意x，如果x是哲学家，那么x喜欢苏格拉底。

$$\forall x(P(x) \rightarrow L(x,s))$$

- 每个哲学家都喜欢数学家。
- 任意x，如果x是哲学家，那么x喜欢数学家。
- 任意y，如果y是数学家，那么x喜欢y。

$$\forall x(P(x) \rightarrow \forall y(M(y) \rightarrow L(x,y)))$$

- 每个哲学家都喜欢某个数学家。
- 任意x，如果x是哲学家，那么x喜欢某个数学家
- 存在y，y是数学家，并且x喜欢y

$$\forall x(P(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$$

- 有个数学家，每个哲学家都喜欢他。
- 存在x，x是数学家，并且每个哲学家都喜欢x
- 任意y，如果y是哲学家，那么y喜欢x

$$\exists x(M(x) \wedge \forall y(P(y) \to L(y,x)))$$

- 苏格拉底喜欢某个数学家。
- 存在x，x是数学家，并且苏格拉底喜欢x

$$\exists x(M(x) \wedge L(s,x))$$

- 苏格拉底只喜欢某个数学家。
- 存在x，x是数学家，并且苏格拉底只喜欢x
- 苏格拉底喜欢x，并且任意y，如果y是数学家并且苏格拉底喜欢y，那么y等于x

$$\exists x(M(x) \wedge L(s,x) \wedge \forall y(M(y) \wedge L(s,y) \to y \equiv x)))$$

- 某个哲学家喜欢所有那些不喜欢数学家的哲学家。
- 存在x，x是哲学家，并且x喜欢所有那些不喜欢数学家的哲学家
- 任意y，如果y是哲学家并且y不喜欢数学家，那么x喜欢y

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge \forall z(M(z) \rightarrow \neg L(y,z)) \rightarrow L(x,y)))$$

- 每个哲学家都不喜欢某个喜欢数学家的哲学家。
- 任意x，如果x是哲学家，那么x不喜欢某个喜欢数学家的哲学家
- 存在y，y是哲学家，y喜欢数学家，并且x不喜欢y

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists y(P(y) \wedge \forall z(M(z) \rightarrow L(y,z)) \wedge \neg L(x,y)))$$

Thanks for your attention!
Q & A