一阶逻辑的解析树

高贝贝

1344220150@qq.com

哲学与社会发展学院

逻辑与分析哲学研究中心

http://logic.scnu.edu.cn

主要内容

1. 复习回顾
2. 再论有效性
3. 解析树

A、E、I、O四种直言命题的一阶逻辑表达形式

SAP	$\forall x\ (S(x) \rightarrow P(x))$
SEP	$\forall x\ (S(x) \rightarrow \neg P(x))$
SIP	$\exists x\ (S\ (x) \wedge P(x))$
SOP	$\exists x\ (S\ (x) \wedge \neg P(x))$

更复杂的例子

- 1.牛郎爱织女，并且织女爱牛郎。
- 2.每个人都爱织女。
- 3.有某个人被每个人所爱。
- 4.牛郎不爱那些爱织女的男人。
- 5.织女爱每一个爱牛郎的人。

根据命题中出现的谓词和个体词，我们取一阶语言（P，L^2，a，b）

P是一元谓词，表示“.....是人”

M是一元谓词，表示“.......是男人”

L是二元谓词，表示“......爱.......”

a 和 b 是个体常元，分别表示“牛郎”和“织女”

1.牛郎爱织女，并且织女爱牛郎。

牛郎爱织女 ∧ 织女爱牛郎

L （牛郎，织女） ∧ L （ 织女，牛郎）

$$\boxed{L(a,\ b) \wedge L(b,\ a)}$$

（P，L^2，a，b）

P是一元谓词表示“人”

L是二元谓词表示“。。。爱。。。”

a和b是个体常元，分别表示“牛郎”和“织女”

$L(t,\ m) \wedge \neg L(m,\ t)$

2. 每个人都爱织女。

$\forall x\,(P(x) \rightarrow L(x, b))$

3. 有某个人被每个人所爱。

$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow L(y,x)))$

4.牛郎不爱那些爱织女的男人

$\exists x\,(M(x) \wedge L(x,b) \wedge \neg L(a,x))$

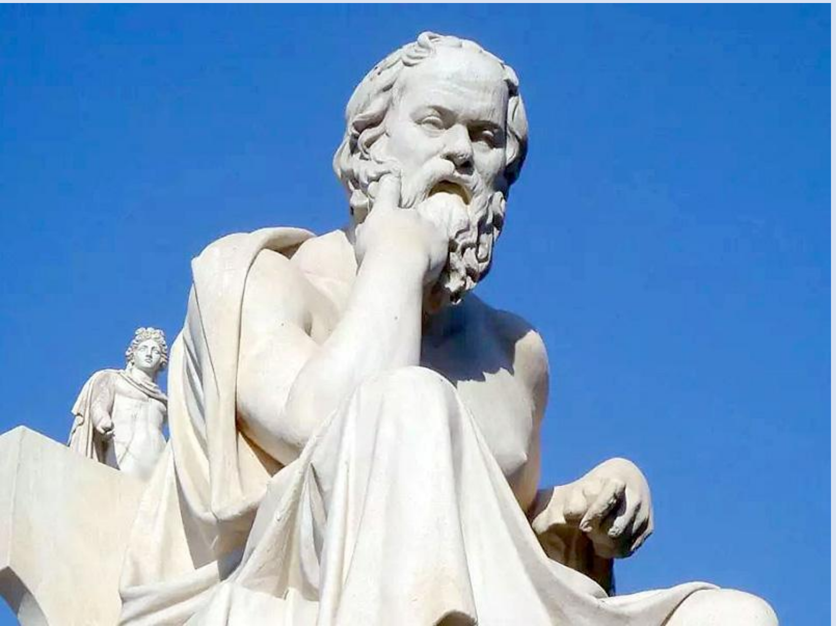
4.织女爱每一个爱牛郎的人

$\forall x(P(x) \wedge L(x,a) \rightarrow L(b,x))$

❖ 再论有效性

- 苏格拉底是人，
- 人都是会死的，
- 所以，苏格拉底是会死的。

$$\frac{\begin{array}{l} P(c) \\ \forall x\,(P(x) \rightarrow M(x)) \end{array}}{M(c)}$$



$$\forall x(Px \rightarrow Qx \wedge Sx)$$

论域：所有的动物

$\boldsymbol{Px}$：$\boldsymbol{x}$是猫

Qx：x是肉食动物

Sx：x是哺乳动物

所有的猫都是肉食动物又是哺乳动物

推理有效性的一般规定

如果推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

满足：不存在情况使得其**前提都为真**，而**结论为假**那么就称这个推理形式是有效的。

一阶逻辑推理有效性的规定

如果推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

满足：不存在**一种解释**使得其前提都为真，而结论为假，那么就称这个推理形式是**有效的**。

如果无前提的推理形式：

$$\frac{}{B}$$

是有效的，就称公式 B 是**有效的**。换言之，如果 B 在任何解释下都为真，那么 B 就是有效的。

- 要断定一个推理形式是无效的，只需要给出一种解释，使得在这个解释下，推理形式的前提为真，而结论为假。

- " 解释"有时又被看做是一种"模型"，上述解释可看做是证明推理形式无效的例子，因此，这种解释又被称为"反模型"。

模型

- **一阶语言的一个模型U（解释）包括下列要素：**
- （1）**个体域D**，即由具有一定性质的个体所构成的集合。
- （2）**谓词的解释**（谓词符号在个体域D上的解释），即表示该个体域中个体的性质和个体间的关系。
- （3）**常元的解释**（个体常元在个体域D中的值），即个体常元表示该个体域中的某个特定个体。

$$\forall x(Sx \rightarrow Px)$$

$$\exists x(Px \wedge Qx)$$

$$\therefore \quad \exists x(Sx \wedge Qx)$$

个体域D为：所有动物　P：哺乳动物　S：猫　Q：狗

所有猫都是哺乳动物

有些哺乳动物是狗

∴有些猫是狗

无效

普遍有效式

- $\forall x F(x) \rightarrow F(a)$
- $\forall x\big(F(x) \vee \neg F(x)\big)$
- $\forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x)$
- $\forall x F(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg F(x)$

普遍有效式是一阶逻辑的规律，可以用作有效推理的根据。

❖解析树

解析全称式、存在式的否定

∀_规则

$$\forall x\, A$$
$$\vdots$$
$$A(a/x)$$

¬∃_规则

$$\neg\exists x\, A$$
$$\vdots$$
$$\neg A(a/x)$$

其中，a可以是任意的常元。

解析存在式、全称式的否定

¬∀_规则

$$
\begin{array}{c}
\exists x\, A \\
| \\
\vdots \\
| \\
A(b/x)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
\neg\forall x\, A \\
| \\
\vdots \\
| \\
\neg A(b/x)
\end{array}
$$

∃_规则

- 其中，***b*** 为新常元，即到此为止从未在解析树的构造中使用过的常元。

一阶逻辑中的代入

- $A(a/x)$ 表示用常元a 去替换公式A 中变元x 的所有自由出现，这种对公式的变形一般称为在A 中用a 代入x。

$$A = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$$

$$A(a/v_1)$$

$$A(a/v_2)$$

一阶逻辑中的代入

$$A = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$$

$$A(a/v_1) = \exists v_2 R(a, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$$

$$A(a/v_2) = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(a)$$

解析全称式、存在式的否定

∀_规则

$$\begin{array}{c} \forall x\, A \\ | \\ \vdots \\ | \\ A(a/x) \end{array}$$

如果$\forall xA$为真，则A对于个体域中的<u>每一个个体</u>都为真。

¬∃_规则

$$\begin{array}{c} \neg\exists x\, A \\ | \\ \vdots \\ | \\ \neg A(a/x) \end{array}$$

其中，a可以是任意的常元。

❖ **例子：**

$$\forall x F(x) \to F(a)$$

$$\neg\left(\forall x F(x) \to F(a)\right)$$

$$\forall x F(x), \neg F(a)$$

$$F(a)$$

x

所以，$\forall x F(x) \to F(a)$为有效式。

❖ **例子：**

$$\exists x F(x) \rightarrow F(a)$$

$$\neg(\exists x F(x) \rightarrow F(a))$$

$$\exists x F(x), \neg F(a)$$

矛盾是人为产生，并非逻辑导出。

$$F(a)$$

x

解析存在式、全称式的否定

$\neg\forall$_规则

$$\begin{array}{c}\neg\forall x\, A\\ |\\ \vdots\\ |\\ \neg A(b/x)\end{array}$$

如果$\neg\forall xA$为真，则A并**不**对于个体域中的所有个体都为真。**对于有的个体成立**；有的个体不成立。

$\exists$_规则

$$\begin{array}{c}\exists x\, A\\ |\\ \vdots\\ |\\ A(b/x)\end{array}$$

- 其中，***b*** 为新常元，即到此为止从未在解析树的构造中使用过的常元。

判定$\exists x(F(x) \to \forall x F(x))$是否有效?

$$\neg(\exists v(P(v) \to \forall v P(v)))$$

$$|$$

$$\neg(P(a) \to \forall v P(v)))$$

$$|$$

$$P(a), \neg\forall v P(v))$$

$$|$$

$$\neg P(b)$$

$$|$$

$$\neg(P(b) \to \forall v P(v)))$$

$$|$$

$$P(b), \neg\forall v P(v))$$

$$|$$

$$\times$$

- 小技巧：

- 在运用规则时，先使用联结词规则，然后在使用量词规则。

- 在量词规则中，先运用$\neg\forall_$规则和$\exists_$规则。

❖ **例子：**

$$\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (\exists x M(x) \rightarrow \exists x P(x))$$

- **判定是否有效?**

$$(\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \rightarrow \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2)))$$

$$\neg(\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \rightarrow \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2)))$$

$$|$$

$$\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)), \neg \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2))$$

$$|$$

$$\exists v_2 (R(a, v_2))$$

$$|$$

$$R(a, b)$$

$$|$$

$$\neg \forall v_1 (R(v_1, b))$$

$$|$$

$$\neg R(c, b)$$

$$|$$

$$\exists v_2 (R(c, v_2))$$

- 在命题逻辑中，对任意公式，可把其解析树扩展为饱和的，然后做出判定：
- 如果此解析树是<u>**闭**</u>的，那么原公式是<u>**有效的**</u>；
- 如果此解析树<u>**不是闭**</u>的，那么原公式是<u>**无效的**</u>。
- 在这个意义上，命题逻辑中的解析树是**能行判定方法**。

- 在一阶逻辑中，对于一个公式，其解析树没有饱和概念（或饱和概念无法用于判定有效性）！
- 当原公式是有效时，解析树的生成过程最终会终止，并得到一个闭解析树，由此可判定原公式是有效的；
- 公式的解析树有可能永不终止，此时无法做出判定！
- 在这个意义上，一阶逻辑中的解析树是**半能行判定方法**。

解析树的启发

- 如果发现公式的解析树始终不闭，那么可以猜测原公式不是有效的。

有时候，可通过观察已生成的解析树，尝试构造原公式的**反模型**。

❖ 例子：

$$\exists x F(x) \to F(a)$$

$$\neg\left(\exists x F(x) \to F(a)\right)$$

$$\exists x F(x), \neg F(a)$$

$$F(b)$$

- 构造解释如下：
- 个体域：{a，b}。
- *F*(x) 解释为某个性质，使得*a* 不具有这种性质，但*b* 具有这种性质。
- 在上一解释下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

Thanks for your attention!

Q & A