Lecture 10: Σ_1-完全性

熊　明

1　学习目标

(1) 了解算术层次，熟悉其中的 Δ_0-公式和 Σ_1-公式

(2) 熟悉算术 Δ_0-可判定性

(3) 熟悉算术 Σ_1-完全性

2　引导问题

(1) 何谓 Δ_0-公式、Δ_n?

(2) 何谓 Σ_1-公式、Σ_n?

(3) 何谓 Π_1-公式、Π_n?

(4) 算术 Δ_0-可判定性是什么意思?

(5) 算术 Σ_1-完全性是什么意思?

3　教学纲要

定义 3.1 通过并且只有通过以下规则给出的符号串被称为（$\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ **中的）公式**:

(1) 若 s、t 是项，则 $(s \equiv t)$ 都是公式；

(2) 若 A 是公式，则 $\neg A$ 也是公式；

(3) 若 A、B 是公式，则 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$ 也都是公式；

(4) 若 A 是公式，x 是变元，则 $\forall x A$、$\exists x A$ 也都是公式；

(5) 只有按照以上规则形成的符号串才是公式。

$\exists x A$: $A(0) \vee A(1) \vee \ldots \vee A(\overline{n}) \vee \ldots$

定义 3.2 通过并且只有通过以下规则给出的符号串被称为（$\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$ **中的**）Δ_0 **公式**:

(1) 若 s、t 是项，则 $(s \equiv t)$ 都是 Δ_0 公式；

(2) 若 A 是 Δ_0 公式，则 $\neg A$ 也是 Δ_0 公式；

(3) 若 A、B 是 Δ_0 公式，则 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$ 也都是 Δ_0 公式；

(4) 若 A 是 Δ_0 公式，x、y 是两个不相同的变元，则 $\forall x < y A$、$\exists x < y A$ 也都是 Δ_0 公式；

(5) 只有按照以上规则形成的符号串才是 Δ_0 公式。

$\forall x < y A$ 是“$\forall x(x < y \rightarrow A)$”的缩写

$\forall x < y A$ 的直观:

$\exists x < y A$ 是“$\exists x(x < y \wedge A)$”的缩写

$\exists x < \overline{n} A$ 的直观：$A(0) \vee A(1) \vee \ldots \vee A(\overline{n-1})$

Note: $\neg \exists x < y A$ is logically equivalent to

$\neg \exists x (x < y \wedge A)$, i.e.,

$\forall x \neg (x < y \wedge A)$, i.e.,

$\forall x (\neg x < y \vee \neg A)$, i.e.,

$\forall x (x < y \rightarrow \neg A)$, i.e.,

$\forall x < y \neg A$

Σ_1 公式: $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k A$, $A \in \Delta_0$

Π_1 公式: $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k A$, $A \in \Delta_0$

Σ_2 公式: $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k A$, $A \in \Pi_1$

Π_2 公式: $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k A$, $A \in \Sigma_1$

Σ_3 公式: $\exists x_1 \exists x_2 \ldots \exists x_k A$, $A \in \Pi_2$

Π_3 公式: $\forall x_1 \forall x_2 \ldots \forall x_k A$, $A \in \Sigma_2$

Σ_n: $\exists x_1 \ldots \exists x_k \forall y_1 \ldots \forall y_l \ldots (A)$, $A \in \Delta_0$

定理 3.3 设 $A(x_1, \ldots, x_k)$ 是 Δ_0 公式，其中自由变元只有 $x_1, \ldots, x_k$。对任意自然数 $n_1, \ldots, n_k$，有:

(1) 若 $\mathcal{N} \models A[n_1, \ldots, n_k]$，则 $\mathrm{PA} \vdash A(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$。

(2) 若 $\mathcal{N} \not\models A[n_1, \ldots, n_k]$，则 $\mathrm{PA} \vdash \neg A(\overline{n_1}, \ldots, \overline{n_k})$。

推论 3.4 设 A 是 Δ_0 语句。有:

(1) 若 $\mathcal{N} \models A$，则 $\mathrm{PA} \vdash A$。

(2) 若 $\mathcal{N} \not\models A$，则 $\mathrm{PA} \vdash \neg A$。

定理 3.5 For all Σ_1-sentence A, if $\mathcal{N} \models A$, then $\mathrm{PA} \vdash A$.

4 课后任务

问题 4.1 完成我的讲义中习题 2.3.1.

问题 4.2 阅读：Boolos 1993, section ‘Pterms and Σ formulas,’ pp. 24-27.