Lecture 14: H. Friedman 问题 35 及其解决

熊　明

1　学习目标

(1) 了解 H. Friedman 问题 35

(2) 了解 H. Friedman 问题 35 的解决方法

(3) 了解 Solovay 第一、第二算术完全性定理

2　引导问题

(1) 什么是无变元的模态公式，它对应于何种算术公式?

(2) GL 中的模态在哪些方面酷似算术的可证性谓词?

(3) 什么是算术翻译，它是“忠实的”翻译吗?

(4) Solovay 第一、第二算术完全性定理究竟表达了什么?

3　教学纲要

动机:

定义 3.1 符合且只有符合下列规则的符号串是无变元的模态公式:

Table 1　常见的自指性语句的真假

自指性语句	自指性语句的真假
$G \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}\left(\ulcorner G \urcorner\right)$	$\mathcal{N} \models G, \neg\mathrm{Bew}\left(\ulcorner \bot \urcorner\right)$
$H \leftrightarrow \mathrm{Bew}\left(\ulcorner H \urcorner\right)$	$\mathcal{N} \models H, \top$
$\delta \leftrightarrow \mathrm{Bew}\left(\ulcorner \neg\delta \urcorner\right)$	$\mathcal{N} \not\models \delta, \mathrm{Bew}\left(\ulcorner \bot \urcorner\right)$
$\delta \leftrightarrow \neg\mathrm{Bew}\left(\ulcorner \neg\delta \urcorner\right)$	$\mathcal{N} \models \delta, \neg\mathrm{Bew}\left(\ulcorner \bot \urcorner\right)$
$\delta \leftrightarrow (\mathrm{Bew}\left(\ulcorner \delta \urcorner\right) \to \mathrm{Bew}\left(\ulcorner \neg\delta \urcorner\right))$	$\mathcal{N} \models \delta, \left(\mathrm{Bew}\left(\ulcorner \mathrm{Bew}\left(\ulcorner \bot \urcorner\right) \urcorner\right) \to \mathrm{Bew}\left(\ulcorner \bot \urcorner\right)\right)$

(i) $\bot$ 是无变元的模态公式。

(ii) 若 A、B 是无变元的模态公式，则 $A \to B$ 也是（因此，其他布尔组合式视作定义式）。

(iii) 若 A 是无变元的模态公式，则 $\Box A$ 也是。

递归定义从无变元的模态公式的集合到算术语句集的映射 * 如下：$\bot^*$ 规定为算术语句 $\bot$（也就是 $\neg(\mathbf{0} \equiv \mathbf{0})$）；$(A \to B)^*$ 规定为 $A^* \to B^*$；$(\Box A)^*$ 规定为 $\mathrm{Bew}\left(\ulcorner A^* \urcorner\right)$。可称 A^* 是 A 的（算术）翻译。无变元模态公式的算术翻译有时候又被称为恒常语句。

1975 年，H. Friedman 在文"数学逻辑中的一百零二个问题"（One Hundred and Two Problems in Mathematical Logic）中列出 102 个数理逻辑问题，其中第 35 个问：

是否存在一个算法用来判断恒常语句的真假?

这个问题很快由 Boolos、C. Bernardi、F. Montagna 各自独立地给出了

肯定的回答。

Boolos:“对 Friedman 这一问题的回答是模态逻辑应用于解决数理逻辑问题的第一个事例。”

模态系统 GLS:

- GLS 的公理:
  (i) GL 的所有定理
  (ii) 模式 $\Box A \to A$
- GLS 的推理规则:分离规则(没有必然化规则)

系统 GLS 的另一种建立方法:

- GLS 的公理:
  (i) 命题逻辑的公理模式
  (ii) 模式 □K、□4、□W
  □K:$\Box(\Box(A \to B) \to \Box A \to \Box B)$
  (iii) 模式 $\Box A \to A$
- GLS 的推理规则:分离规则(没有必然化规则)

定理 3.2 设 A 是无变元的模态公式。GLS $\vdash A$,当且仅当 $\mathcal{N} \models A^*$。

Example:

$\delta \leftrightarrow (\mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \delta \urcorner}\right) \to \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \neg\delta \urcorner}\right))$

$\mathcal{N} \models \delta, \left(\mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \perp \urcorner}\right) \urcorner}\right) \to \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \perp \urcorner}\right)\right)$

Here, $A^* = \left(\mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \perp \urcorner}\right) \urcorner}\right) \to \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \perp \urcorner}\right)\right)$

$A = (\Box\Box\perp \to \Box\perp)$

To decide whether $A^* = \left(\mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \perp \urcorner}\right) \urcorner}\right) \to \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \perp \urcorner}\right)\right)$ is true or false (in the standard model $\mathcal{N}$), we only need to decide whether $A = (\Box\Box\perp \to \Box\perp)$ is provable or not in modal logic GLS. Now, we know $A = (\Box\Box\perp \to \Box\perp)$ is trivally provable in modal logic GLS, and thus we obtain

$$A^* = \left(\mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \perp \urcorner}\right) \urcorner}\right) \to \mathrm{Bew}\left(\overline{\ulcorner \perp \urcorner}\right)\right)$$

is true.

定理 3.3 设 A 是无变元的模态公式。GL $\vdash A$，当且仅当 PA $\vdash A^*$。

****

递归定义从模态公式的集合到算术语句集的映射 * 如下：

对任意命题变元 π，π^* 规定为某个算术语句;

$\perp^*$ 规定为算术语句 $\perp$（也就是 $\neg(\mathbf{0} \equiv \mathbf{0})$）;

$(A \to B)^*$ 规定为 $A^* \to B^*$;

$(\Box A)^*$ 规定为 $\mathrm{Bew}\left(\ulcorner \overline{A^*} \urcorner\right)$。

称 A^* 是 A 的一个（算术）翻译。

定理 3.4 (**索罗维第一算术完全性定理**) 对任何模态公式 A，$\mathrm{GL} \vdash A$，当且仅当对任何翻译 *，$\mathrm{PA} \vdash A^*$ 都成立。

定理 3.5 (**索罗维第二算术完全性定理**) 对任何模态公式 A，$\mathrm{GLS} \vdash A$，当且仅当对任何翻译 *，$\mathcal{N} \models A^*$，即 A^* 在 PA 的标准模型中为真。

4 课后任务

问题 4.1 阅读我的讲义 3.3 节.

问题 4.2 阅读 Boolos (1993), pp. 92-98.

问题 4.3 (optional) 阅读 Boolos (1993), Chapter 10 (pp.138-147): this chapter gives an algorithm to decide whether a modal formula is provable in GL (This algorithm can be used to decide the provability of GLS).