Lecture 9: 一阶皮亚诺算术

熊　明

1　学习目标

(1) 熟悉一阶皮亚诺算术的公理

(2) 熟悉一阶皮亚诺算术中的推导

(3) 尤其是，熟悉一阶皮亚诺算术中的数学归纳法

2　引导问题

(1) 一阶皮亚诺算术有哪些公理或公理模式?

(2) 归纳公理模式是什么?

(3) 试比较归纳公理模式与数学归纳法。

(4) 归纳公理模式大体上对应了第一数学归纳法原理。第二数学归纳法原理在一阶皮亚诺算术中对应的模式是什么?

(5) 你能从归纳公理模式，推导出刚刚提到的模式吗?

3 教学纲要

基本推导:

例子 3.1 证明: $\mathrm{PA} \vdash \overline{1} + \overline{2} = \overline{3}$

归纳模式的应用:

例子 3.2 证明 $\mathrm{PA} \vdash \forall v_1(\neg v_1 \equiv \mathbf{0} \to \exists v_2(v_1 \equiv S v_2))$

例子 3.3 证明:

(1) $\mathrm{PA} \vdash \forall v_1 \forall v_2(\boldsymbol{S} v_1 + v_2 \equiv v_1 + \boldsymbol{S} v_2)$

(2) $\mathrm{PA} \vdash \forall v_1 \forall v_2(v_1 + v_2 \equiv v_2 + v_1)$

例子 3.4 证明:

(1) 若 $i + 1 = k$, 则 $\mathrm{PA} \vdash \boldsymbol{S}\overline{i} \equiv \overline{j}$。

(2) 若 $i + j = k$, 则 $\mathrm{PA} \vdash \overline{i} + \overline{j} \equiv \overline{k}$。

(3) 若 $i \times j = k$, 则 $\mathrm{PA} \vdash \overline{i} \cdot \overline{j} \equiv \overline{k}$。

(4) 对任意闭项 t 和自然数 n, 若 $\mathcal{N} \models t \equiv \overline{n}$, 则 $\mathrm{PA} \vdash t \equiv \overline{n}$。

4 课后任务

问题 4.1 证明:

(1) $\mathrm{PA} \vdash \forall v(v \cdot \overline{1} \equiv v)$

(2) $\mathrm{PA} \vdash \forall v_1 \forall v_2 (v_1 \cdot v_2 \equiv v_2 \cdot v_1)$

问题 4.2 证明：

(1) 若 $i = j$，则 $\mathrm{PA} \vdash \bar{i} \equiv \bar{j}$。

(2) 若 $i \neq j$，则 $\mathrm{PA} \vdash \neg(\bar{i} \equiv \bar{j})$。

问题 4.3 用“$x|y$”表示 $\exists z y \equiv x \cdot z$。证明：

(1) $\mathrm{PA} \vdash \bar{2}|\bar{4}$

(2) $\mathrm{PA} \vdash \forall v (\bar{1}|v)$

问题 4.4 证明：

(1) $\mathrm{PA} \vdash \forall v \neg v < \mathbf{0}$

(2) $\mathrm{PA} \vdash \forall v_1 \forall v_2 (v_1 < \boldsymbol{S} v_2 \leftrightarrow v_1 < v_2 \vee v_1 \equiv v_2)$

问题 4.5 对任意自然数 k，证明：$\mathrm{PA} \vdash \forall v (v < \overline{k} \leftrightarrow v \equiv \mathbf{0} \vee \ldots \vee \equiv \overline{k-1})$。注意，当 k 等于 0 时，约定 $\leftrightarrow$ 右边的析取式为 $\perp$。