谓词逻辑

高贝贝
1344220150@qq.com
哲学与社会发展学院
逻辑与分析哲学研究中心
http://logic.scnu.edu.cn

所有人都是会死的

苏格拉底是人

所以，苏格拉底是会死的。

有人爱每个人

所以，每个人都有人爱

为了研究简单命题的内部结构，需要对简单命题进行进一步的分析，分离出表达个体的个体词、表达性质或关系的谓词、表达数量的量词，从而对简单命题的逻辑结构进行描述。由此建立起来的逻辑称为谓词逻辑，也称作一阶逻辑。

主要内容

1. 个体词、谓词和量词
2. 一阶语言
3. 命题的形式化
4. 有效性判定

个体词、谓词和量词

苏格拉底是哲学家

哲学家是数学家

哲学家都不是数学家

苏格拉底不是哲学家

有的哲学家不是数学家

有的哲学家是数学家

个体词：就是表示个体的词。

专名：表示独一无二对象的名称。常见的人名、地名等都是专名。

例如：苏格拉底、柏拉图、北京、广州等等。

我们用符号代表专名，这样的符号我们称之为个体常元，简称常元。通常用小写$\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$…表示。

苏格拉底是哲学家：$\boldsymbol{a}$是哲学家

苏格拉底培养了柏拉图：$\boldsymbol{a}$培养了$\boldsymbol{b}$

- 苏格拉底是哲学家
- 鲁迅是文学家
- 金岳霖是逻辑学家

- **有的人是哲学家**
- **有的人是文学家**
- **有的人是逻辑学家**
- **所有乌鸦都是黑的**

- 苏格拉底是哲学家
- 鲁迅是文学家
- 金岳霖是逻辑学家

- **有的人是哲学家**
- **有的人是文学家**
- **有的人是逻辑学家**
- **所有乌鸦都是黑的**

不同于专名，还有一些不是特指某个对象而是泛指某些对象的个体词。

表达该类用于泛指个体对象的符号，我们称之为个体变元，简称变元。

通常用小写字母x、y、z、v、v_1…表示。

特别要指出的是，变元虽然不特指对象，但在一定的情形下，它所指对象的范围总是固定的——论域。

- 谓词：是表示一定事物具有的性质或一定事物之间存在关系的语词。
- 谓词中含有空位，空位数称为该谓词的元数。
- 一元谓词的例子： “…是哲学家”、 “…是人”、 “…是白色的”
- 二元谓词的例子： “…培养…”、 “…喜欢…”、 “…小于…”
- 谓词符号用大写的F, G, H, R……表示。
- 注意谓词中的空位用个体词填充（a、b、x、y、z、v、v_1 ...）等来代替。

苏格拉底 是哲学家

所指对象是特定的，不变的，相当于数学中的常元。

“哲学家”的指称对象是笼统的，可变的，相当于数学的变元。

…… 是哲学家

空位

- 苏格拉底是哲学家
- 鲁迅是文学家
- 金岳霖是逻辑学家

- **有的人是哲学家**
- **有的人是文学家**
- **有的人是逻辑学家**
- **所有乌鸦都是黑的**

- <u>苏格拉底</u>是哲学家
- <u>鲁迅</u>是文学家
- <u>金岳霖</u>是逻辑学家

- **有的人是哲学家**
- **有的人是文学家**
- **有的人是逻辑学家**
- **所有乌鸦都是黑的**

- 量词就是表示数量的语词。
- 全称量词： “任何”、 “所有”、 “任意”、 “全体”等
- 存在量词： “存在”、 “有的”、 “至少存在一个”等。
- $\forall v$（...）：任何v，⋯
- $\exists v$（...）：存在v，⋯
- 注意：省略号位置被称为$\forall v$（...）中$\forall v$的辖域或$\exists v$（...）中$\exists v$的辖域

一阶语言

- 个体变元：x、y、z、v、v_1
- 联结词：¬、∨、∧、→。
- 量词：∀、∃
- 辅助符：左括弧（、右括弧）。
- 谓词：表示谓词的符号：如P，G，F，R等等
- 个体常元：表示个体常元的符号：如a、b、c等等

形成规则

- 如果t_1，t_2，t_3，…，t_n是个体变元或常元，P是该一阶语言中的n元谓词，那么P（t_1，t_2，t_3，… ，t_n)是公式；
- 如果 A是公式，那么 $\neg A$也是；
- 如果 A和 B是公式，那么 （$A \wedge$B）、 （$A \vee$B）、 （$A \rightarrow$B） 是公式。
- 如果 A是公式，那么对任何个体变元 x， $\forall xA$， $\exists xA$ 也是公式。

原子公式 $P\ (t_1,\ t_2,\ t_3,\ \cdots,\ t_n)$

全称公式 $\forall xA$

特称公式 $\exists xA$

不同于专名，还有一些不是特指某个对象而是泛指某些对象的个体词。

表达该类用于泛指个体对象的符号，我们称之为个体变元，简称变元。通常用小写字母x、y、z、v、v_1…表示。

特别要指出的是，变元虽然不特指对象，但在一定的情形下，它所指对象的范围总是固定的——论域。

- 量词的辖域
- 量词的辖域是指在量词后面紧随的第一个完整公式。
- 例如：
- $\forall x\ (F(x) \rightarrow G(x))$
- $(F(x) \rightarrow G(x))$
- $\exists x F(x) \wedge \forall y F(y)$
- $\exists x\ (F(x) \wedge \forall y\ \boxed{(G(y) \rightarrow F(y))}\,)$

- **“一个公式中所出现的变元”**和**“一个变元在一个公式中的出现”**
- $\exists x（F（x）\wedge \forall y（G（y）\rightarrow S（z）））$
- 在公式中，总共出现了三个不同的个体变元 x、 y、z。
- 但是x出现了两次， y出现了两次、z只出现一次。

- 一个变元的某一次出现，如果处于量词的辖域之内，那么该变元的出现是“约束出现”，否则叫做“自由出现”。

- $\exists x\ (F\ (x)\ \wedge\ \forall y\ (G\ \ (y)\ \rightarrow F\ (y)\ \ )\ )$
- x和y的出现是受约束的
- $\exists x\ (F\ (x)\ \wedge\ \forall y\ (G\ (y)\ \rightarrow S\ (z\ )\ \ )\ )$
- x和y的出现是受约束的， z 不受约束

- 一个变元，如果在一个公式中有约束出现，则称它是“约束变元”
- 如果在一个公式中有自由出现，则称它是“自由变元”。
- 显然地，一个公式中，一个个体变元可以既是约束变元又是自由变元。
- 一个含有至少一个自由变元的公式，叫做开公式。
- 一个不含任何自由变元的公式，叫做闭公式。

命题的形式化

苏格拉底是哲学家

苏格拉底，____________是哲学家

a	P( )

P(a)

- 鲁迅不是哲学家
- 结构：并非“鲁迅是哲学家”
- “鲁迅是哲学家”
- “鲁迅” + “______是哲学家”
- 引入符号：a、P(…)
- 分析结果：$\neg P(a)$

- 鲁迅爱许广平
- 鲁迅，＿（＿＿＿）＿爱＿（＿＿＿）＿，许广平

鲁迅	（　）爱（　）	许广平
a	L（ ， ）	b
L(a，b)		

SAP

- 所有的哲学家都是数学家

结构分析

- “任意x，如果x是哲学家，那么x是数学家”

引入符号

- $\forall x$表示“任意x”，P(…)表示“…是哲学家”，M(…)表示“…是数学家”

分析结果

- $\forall x\ (P(x) \rightarrow M(x))$

SIP

- 有的哲学家是数学家

结构分析

- 存在哲学家，Ta是数学家

“存在x，x是哲学家，并且x是数学家”

引入符号

- $\exists x$表示“存在x”，P(…）表示“…是哲学家”，M(…)表示“…是数学家”

分析结果

- $\exists x\ (P(x) \wedge M(x))$

SEP

- 任意偶数都不是奇数

结构分析

- “任意x，如果x是偶数，那么x不是奇数”

引入符号

- $\forall x$表示“任意x”，E(…)表示“…是偶数”，O(…)表示“…是奇数”

分析结果

- $\forall x(E(x) \rightarrow \neg O(x))$

SOP

- 有的阔叶植物不是落叶的

结构分析

- 存在阔叶植物，Ta不是落叶的
- “存在x，x是阔叶植物，并且x不是落叶的”

引入符号

- $\exists x$表示“存在x”，S(…)表示“…是阔叶植物”，P(…)表示“…是落叶的”

分析结果

- $\exists x(S(x) \land \neg P(x))$

练习题：

- 所有金属都是有光泽的
- 所有大学生既有知识又有修养
- 好书或者能怡情或者能益智
- 所有动物和植物都需要水和空气

- $\forall x\big(M(x) \rightarrow G(x)\big)$
- $\forall x(S(x) \rightarrow (Z(x) \wedge X(x)))$
- $\forall x(B(x) \wedge G(x) \rightarrow (H(x) \vee Z(x)))$
- $\forall x(D(x) \vee Z(x) \rightarrow (W(x) \wedge A(x)))$

复杂命题的分析与表达

1.亚里士多德爱柏拉图，但柏拉图不爱亚里士多德

L（a,b）∧¬L(b,a)

2.每个哲学家都喜欢苏格拉底

任意x，如果x是哲学家，那么x喜欢苏格拉底。

$$\forall x(P(x) \rightarrow L(x,s))$$

每个哲学家都喜欢数学家

1. 任意x，如果x是哲学家，那么x喜欢数学家。

2. 任意y，如果y是数学家，那么x喜欢y。

$$\forall x(P(x) \to \forall y(M(y) \to L(x,y)))$$

例子：每个哲学家都喜欢某个数学家

1. 任意x，如果x是哲学家，那么x喜欢某个数学家

2. 存在y，y是数学家，并且x喜欢y

$$\forall x(P(x) \to \exists y(M(y) \wedge L(x,y)))$$

例子：有个数学家，每个哲学家都喜欢他

1.存在x，x是数学家，并且每个哲学家都喜欢x

2.任意y，如果y是哲学家，那么y喜欢x

$$\exists x(M(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow L(y,x)))$$

某个哲学家喜欢所有那些不喜欢数学家的哲学家。

1. 存在x，x是哲学家，并且x喜欢所有那些不喜欢数学家的哲学家
2. 任意y，如果y是哲学家并且y不喜欢数学家，那么x喜欢y

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \wedge \forall z(M(z) \rightarrow \neg L(y,z)) \rightarrow L(x,y)))$$

每个哲学家都不喜欢某个喜欢数学家的哲学家。

1.任意x，如果x是哲学家，那么x不喜欢某个喜欢数学家的哲学家。

2.存在y，y是哲学家，y喜欢数学家，并且x不喜欢y。

$$\forall x(P(x) \to \exists y(P(y) \wedge \forall z(M(z) \to L(y,z)) \wedge \neg L(x,y)))$$

Thanks for your attention!

Q & A