

谓词逻辑

高贝贝

1344220150@qq.com

哲学与社会发展学院

逻辑与分析哲学研究中心

<http://logic.scnu.edu.cn>

主要内容

- 1/ 复习回顾
- 2/ 模型与赋值
- 3/ 有效性判定

A、E、I、O四种直言命题的一阶逻辑表达形式

A: 所有S都是P

$$\forall x(S(x) \rightarrow P(x))$$

E: 所有S都不是P

$$\forall x(S(x) \rightarrow \neg P(x))$$

I: 有S是P

$$\exists x(S(x) \wedge P(x))$$

O: 有S不是P

$$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$$

- 1.牛郎爱织女，并且织女爱牛郎。
- 2.每个人都爱织女。
- 3.有某个人被每个人所爱。
- 4.牛郎不爱那些爱织女的男人。
- 5.织女爱每一个爱牛郎的人。

根据命题中出现的谓词和个体词，我们取一阶语言 (P, L^2, a, b)
P是一元谓词，表示“.....是人”
M是一元谓词，表示“.....是男人”
L是二元谓词，表示“.....爱.....”
a 和 b 是个体常元，分别表示“牛郎”和“织女”

1. 牛郎爱织女, 并且织女爱牛郎。

$$L(a, b) \wedge L(b, a)$$

2. 每个人都爱织女。

$$\forall x (P(x) \rightarrow L(x, b))$$

3. 有某个人被每个人所爱。

$$\exists x (P(x) \wedge \forall y (P(y) \rightarrow L(y, x)))$$

4. 牛郎不爱那些爱织女的男人

$$\exists x (M(x) \wedge L(x, b) \wedge \neg L(a, x))$$

5. 织女爱每一个爱牛郎的人

$$\forall x (P(x) \wedge L(x, a) \rightarrow L(b, x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow (W(x) \wedge A(x)))$$

论域：所有的对象

Px ： x 是人

Wx ： x 需要水

Ax ： x 需要空气

模型与赋值

一阶语言的一个模型 \mathfrak{M} (解释) 包括下列要素:

- (1) **个体域D**, 即由具有一定性质的个体所构成的集合。
- (2) **谓词的解释** (谓词符号在个体域D上的解释), 即表示该个体域中个体的性质和个体间的关系。
- (3) **常元的解释** (个体常元在个体域D中的值), 即个体常元表示该个体域中的某个特定个体。

1

5

T

D

$W(5)$
 $O(5, D)$
 $\exists x(W(x))$
 $\neg \forall x(W(x))$

$\mathfrak{M} = \langle D, W^M, R^M, O^M, 1^M, 5^M, T^M, D^M \rangle$

其中各个成分如下:

1. $D = \{b_1, b_5, b_T, b_D\}$
2. $1^M = b_1, 5^M = b_5, T^M = b_T, D^M = b_D$
3. $W^M = \{b_1, b_5\}, R^M = \{b_T, b_D\}$
4. $O^M = \{\langle b_1, b_T \rangle, \langle b_5, b_D \rangle\}$

$O(x, y)$

- 给定一个模型，规定在此模型的一个**指派**是从变元集到该模型论域的一个函数。常用 σ 表示指派。
- **一个指派是一个函数 σ** ：它将每个个体变元对应到个体域中的一个个体上。即对任意个体变元 x ， $\sigma(x) \in D$ 。
- 一个模型 \mathfrak{M} 和一个模型上的指派合称为一个**赋值**，记作 $V_{\mathfrak{M},\sigma}(A)$ ，在模型 \mathfrak{M} 上指派 σ 对 A 的赋值。

$$A = W(5), \quad V_{\mathfrak{M},\sigma}(A) = T$$

▶ 公式的真值条件

- ▶ 形如 $F(t_1, \dots, t_n)$ 的公式在 σ 下为真，当且仅当， t_1, \dots, t_n 表示的那 n 个体域中个体确实有 F 表示的那个 n 元关系，即 $\langle \sigma(t_1), \dots, \sigma(t_n) \rangle \in \sigma(F)$ 。
- ▶ 形如 $\forall xA$ 的公式在 σ 下为真，当且仅当，将 A 中自由出现的 x 解释为个体域中的每个个体后， A 总为真。
- ▶ 形如 $\exists xA$ 的公式在 σ 下为真，当且仅当，将 A 中自由出现的 x 解释为个体域中的某个个体后，能使 A 为真。
- ▶ 否定式、合取式、析取式、等值式的真值条件同命题逻辑。

$$\diamond \forall x F(x) \rightarrow F(a)$$

$$\diamond \forall x (F(x) \vee \neg F(x))$$

$$\diamond \forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x)$$

$$\diamond \forall x F(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg F(x)$$

普遍有效式

有效性判定

如果推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \dots, A_n}{B}$$

满足：不存在情况使得其**前提都为真**，而**结论为假**那么就称这个推理形式是**有效的**。

要断定一个推理形式是无效的，只需要给出一种解释（模型），使得在这个解释下，推理形式的前提为真，而结论为假。

\forall -规则

$$\forall xA$$


$A(a/x)$,
 a 可以是任意的常元。

$\neg\forall$ -规则

$$\neg\forall xA$$


$\neg A(b/x)$, b 为
新常元。

$\neg\exists$ -规则

$$\neg\exists xA$$


$\neg A(a/x)$,
 a 可以是任意的常元。

\exists -规则

$$\exists xA$$


$A(b/x)$, b 为新
常元。

- $A(a/x)$ 表示用常元 a 去替换公式 A 中变元 x 的所有自由出现, 这种对公式的变形一般称为在 A 中用 a 代入 x 。

$$A = \exists v_2 R(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$$

$$A(a/v_1) \quad A(a/v_1) = \exists v_2 R(a, v_2) \rightarrow \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$$

$$A(a/v_2) \quad A(a/v_2) = \exists v_2 R(v_1, v_2) \rightarrow \forall v_1 P(v_1) \vee P(a)$$

❖ 例子：判定公式 $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$ 是否有效？

$$\neg(\forall xF(x) \rightarrow F(a))$$

$$\forall xF(x), \neg F(a)$$

$$F(a)$$

x

由解析树可知， $\forall xF(x) \rightarrow F(a)$ 为有效式。

❖ 例子：判定公式 $\exists xF(x) \rightarrow F(a)$ 是否有效？

$$\neg(\exists xF(x) \rightarrow F(a))$$

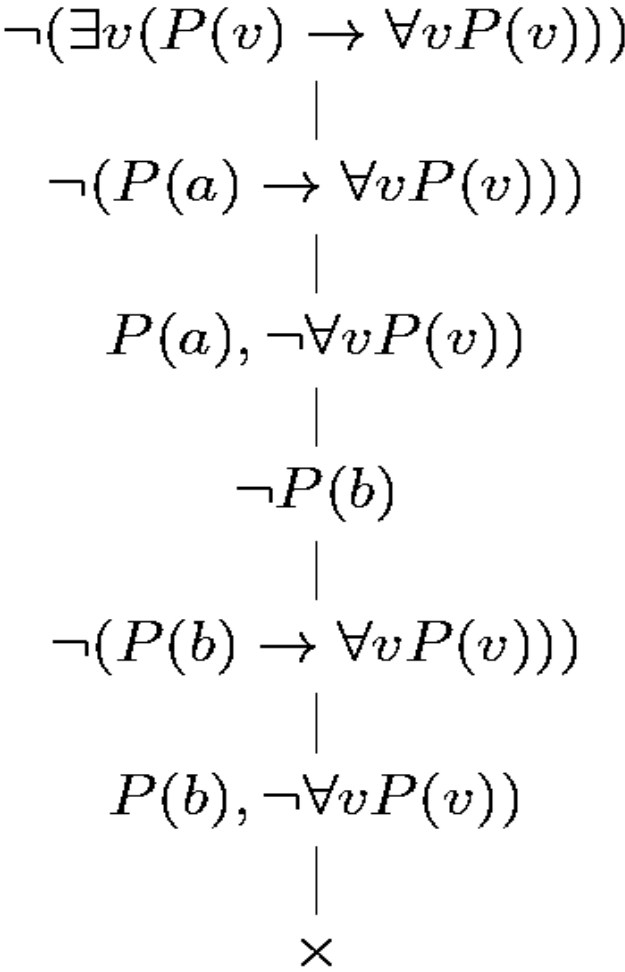
$$\exists xF(x), \neg F(a)$$

$$F(a)$$

X

矛盾是人为产生，并非逻辑导出。

例子：判定 $\exists v(P(v) \rightarrow \forall vP(v))$ 是否有效？



由解析树可知， $\exists x(F(x) \rightarrow \forall xF(x))$ 为有效式。

❖ 小技巧:

❖ 在运用规则时, 先使用联结词规则, 然后在使用量词规则。

❖ 在量词规则中, 先运用 $\neg\forall$ -规则和 \exists -规则。

❖ 例子：判定以下公式是否有效？

1. $\forall x(M(x) \rightarrow P(x)) \rightarrow (\exists xM(x) \rightarrow \exists xP(x))$

2. $\forall v_1\exists v_2(R(v_1, v_2)) \rightarrow \exists v_2\forall v_1(R(v_1, v_2))$

- 在命题逻辑中，对任意公式，可把其解析树扩展为饱和的，然后做出判定：
- 如果此解析树是闭的，那么原公式是**有效**的；
- 如果此解析树不是闭的，那么原公式是**无效**的。
- 在这个意义上，命题逻辑中的解析树是**能行判定方法**。

- ❖ 在一阶逻辑中，对于一个公式，其解析树没有饱和概念（或饱和概念无法用于判定有效性）
- ❖ 当原公式是有效时，解析树的生成过程最终会终止，并得到一个闭解析树，由此可判定原公式是有效的；
- ❖ 公式的解析树有可能永不终止，此时无法做出判定！
- ❖ 在这个意义上，一阶逻辑中的解析树是**半能行判定方法**。

如果发现公式的解析树始终不闭，那么可以猜测原公式不是有效的。有时候，可通过观察已生成的解析树，尝试构造原公式的**反模型**。

❖ 例子：判定 $\exists xF(x) \rightarrow F(a)$ 是否有效？

$$\neg(\exists xF(x) \rightarrow F(a))$$

$$\exists xF(x), \neg F(a)$$

$$F(b)$$

构造反模型如下：

个体域： $\{a, b\}$ 。

$F(x)$ 解释为某个性质，使得 a 不具有这种性质，但 b 具有这种性质。

在这一模型下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

$$\neg(\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \rightarrow \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2)))$$

$$\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)), \neg \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2))$$

$$\exists v_2 (R(a, v_2))$$

$$R(a, b)$$

$$\neg \forall v_1 (R(v_1, b))$$

$$\neg R(c, b)$$

$$\exists v_2 (R(c, v_2))$$

$\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \rightarrow \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ 的反模型构造解释如下:

- 个体域: $\{a, b\}$ 。
- $R(v_1, v_2)$ 解释为某个关系, 使得 $R(a, b)$ 、 $R(b, a)$ 都成立, 但 $R(a, a)$ 、 $R(b, b)$ 。

在上一解释下, 原公式不为真, 故原公式不是有效式。

论域为自然数集 N , $R(v_1, v_2)$ 解释为自然数集上的小于关系, 即 $R^N = \{ \langle m, n \rangle \mid m, n \in N, m < n \}$ 。

在这样的解释下,

“如果任何自然数都小于某个自然数, 那么存在自然数, 它小于所有的自然数。”

Thanks for your attention!

Q & A