

# Solution to Exercise 2 for Propositional Logic

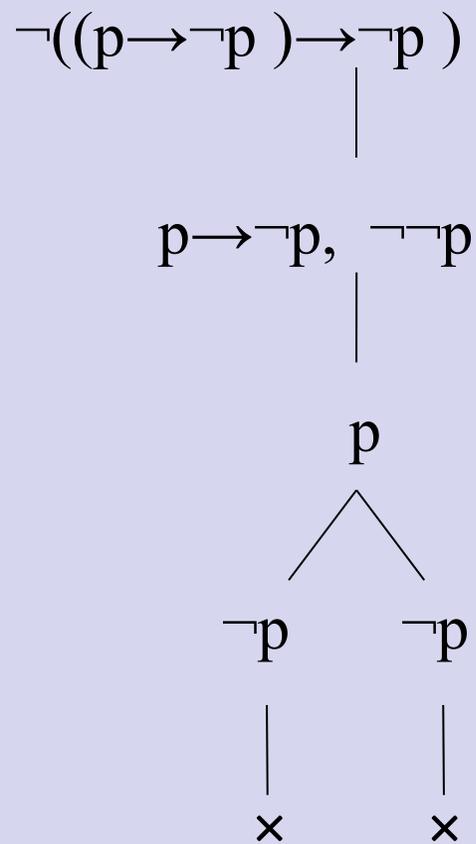
School of Philosophy and Social Development

South China Normal University

## 2.1 用解析树判断下列公式是否是重言式

$$(1) (p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p$$

■ 解答:



构造 $\neg((p \rightarrow \neg p) \rightarrow \neg p)$ 的解析树如图。

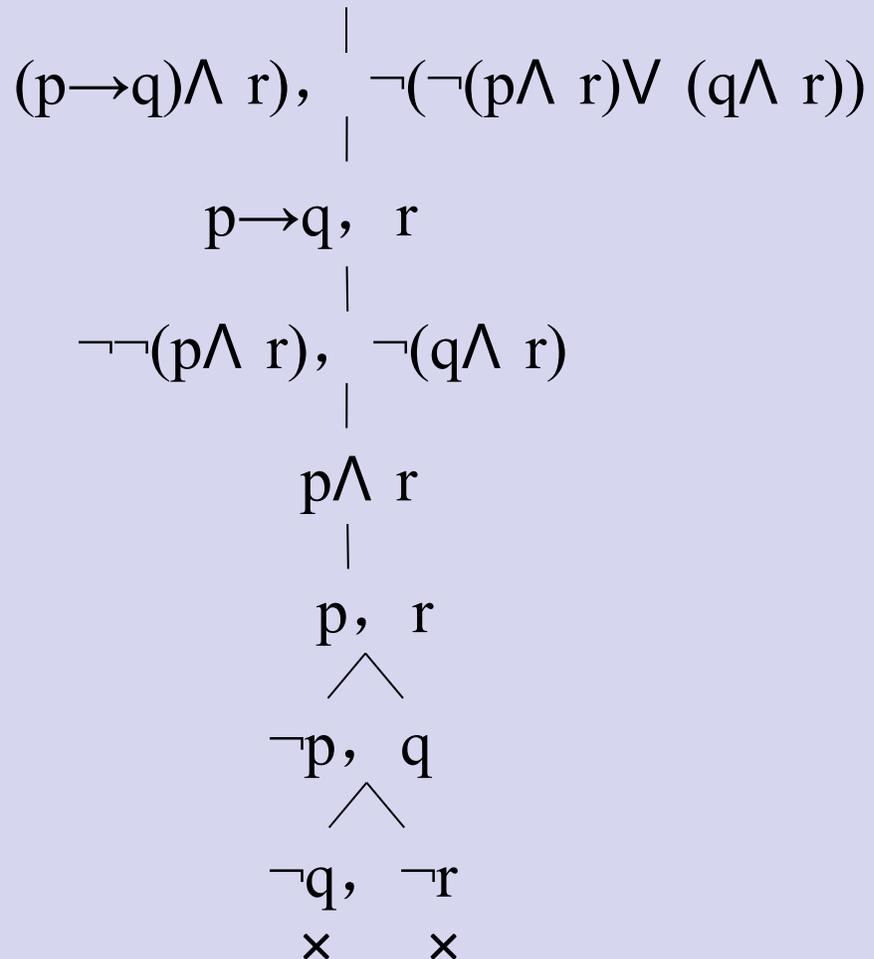
这个解析树的两个枝都是闭的。

所以，可以判断原公式是重言式。

## 2.1 用解析树判断下列公式是否是重言式

$$(2) ((p \rightarrow q) \wedge r) \rightarrow (\neg(p \wedge r) \vee (q \wedge r))$$

■ 解答:  $\neg(((p \rightarrow q) \wedge r) \rightarrow (\neg(p \wedge r) \vee (q \wedge r)))$



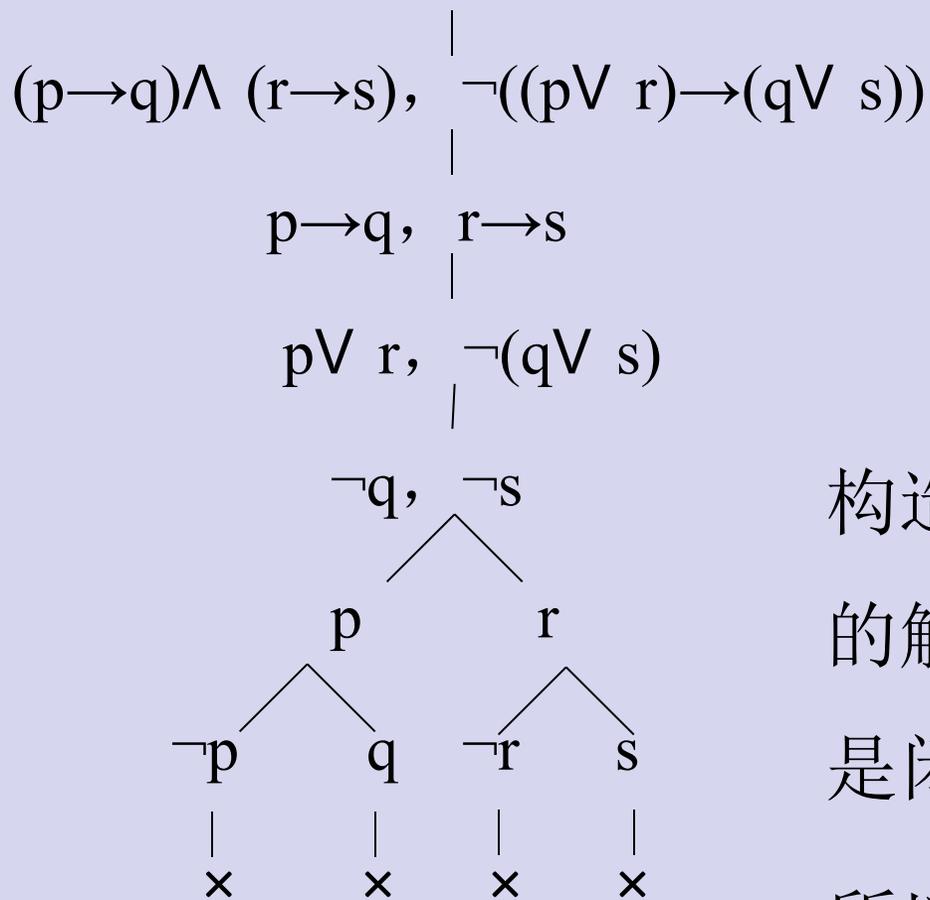
构造 $\neg(((p \rightarrow q) \wedge r) \rightarrow (\neg(p \wedge r) \vee (q \wedge r)))$ 的解析树如图。这个解析树的两个枝都是闭的。

所以，可以判断原公式是重言式。

## 2.1 用解析树判断下列公式是否是重言式

$$(3) ((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s))$$

■ 解答:  $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s)))$



构造 $\neg(((p \rightarrow q) \wedge (r \rightarrow s)) \rightarrow ((p \vee r) \rightarrow (q \vee s)))$ 的解析树如图。这个解析树的两个枝都是闭的。

所以，可以判断原公式是重言式。

## 2.2 判断下面推理的有效性

如果地球围绕太阳公转，但不围绕自己的轴心自转，那么地球上就没有昼夜。而事实是地球上昼夜。所以，或者地球并不公转，或者地球既公转又自转。

■ 解答1：令p表示“地球（围绕太阳）公转”；

q表示“地球（围绕自己的轴心）自转”；

r表示“地球上昼夜”。

该推理的形式为：

$$\frac{(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r, r}{\neg p \vee (p \wedge q)}$$

构造真值表如下：

## 2.2 判断下面推理的有效性

如果地球围绕太阳公转，但不围绕自己的轴心自转，那么地球上就没有昼夜。而事实是地球上昼夜。所以，或者地球并不公转，或者地球既公转又自转。

■ 解答1：构造 $((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \wedge r \rightarrow (\neg p \vee (p \wedge q))$ 的真值表如下：

p	q	r	$(p \wedge \neg q)$	$(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r$	$((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \wedge r$	$(p \wedge q)$	$\neg p \vee (p \wedge q)$	$((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \wedge r \rightarrow (\neg p \vee (p \wedge q))$
T	T	T	F	T	T	T	T	T
T	T	F	F	T	F	T	T	T
T	F	T	T	F	F	F	F	T
T	F	F	T	T	F	F	F	T
F	T	T	F	T	T	F	T	T
F	T	F	F	T	F	F	T	T
F	F	T	F	T	T	F	T	T
F	F	F	F	T	F	F	T	T

该推理形式为重言式。由此，可判断原推理是有效的。

## 2.2 判断下面推理的有效性

如果地球围绕太阳公转，但不围绕自己的轴心自转，那么地球上就没有昼夜。而事实是地球上存在昼夜。所以，或者地球并不公转，或者地球既公转又自转。

■ 解答2：令p表示“地球（围绕太阳）公转”；

q表示“地球（围绕自己的轴心）自转”；

r表示“地球上存在昼夜”。

该推理的形式为：

$$\frac{(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r, r}{\neg p \vee (p \wedge q)}$$

构造解析树如下：

## 2.2 判断下面推理的有效性

如果地球围绕太阳公转，但不围绕自己的轴心自转，那么地球上就没有昼夜。而事实是地球上昼夜。所以，或者地球并不公转，或者地球既公转又自转。

解答2：构造 $((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \wedge r \rightarrow (\neg p \vee (p \wedge q))$ 的解析树如下：

$$\neg(((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \wedge r) \rightarrow (\neg p \vee (p \wedge q))$$

$$\begin{array}{c} | \\ ((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \wedge r, \neg(\neg p \vee (p \wedge q)) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ p, \neg(p \wedge q) \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ (p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r, r \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \neg(p \wedge \neg q) \quad \neg r \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \neg p \quad q \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ \neg p \quad \neg q \end{array}$$

$$\times$$

$$\times$$

$$\times \quad \times$$

构造 $\neg(((p \wedge \neg q) \rightarrow \neg r) \wedge r) \rightarrow (\neg p \vee (p \wedge q))$ 的解析树如图。这个解析树的两个枝都是闭的。

所以，该推理形式为重言式。

由此，可判断原推理是有效的。

## 2.3分析题

深圳中学的四位老师在高考前对某理科毕业班学生前景进行推测，他们尤其关注班上的两个尖子生。

刘老师说：“如果小南能考上清华，那么小北也能考上清华。”

李老师说：“依我看这个班没人能考上清华。”

王老师说：“无论小北能否考上清华，小南考不上清华。”

张老师说：“我看小北考不上清华，但小南能考上清华。”

高考结果证明，四位老师中只有一人推测成立。

如果上述断定为真，则下列哪一项也一定为真？

- A.李老师的推测成立。
- B.王老师的推测成立。
- C.张老师的推测成立。
- D.如果小北考不上清华，则刘老师的推测成立。
- E.如果小北考上了清华，则刘老师的推测成立。

## 2.3 分析题

■ 解答：令 $p$ 表示“小南能考上清华”； $q$ 表示“小北能考上清华”；

①刘老师： $p \rightarrow q$

②李老师： $\neg p \wedge \neg q$

③王老师： $\neg p$

④张老师： $p \wedge \neg q$

由此可知：①和④是相互矛盾的，根据矛盾律（ $\neg(A \wedge \neg A)$ ）、排中律（ $A \vee \neg A$ ），在①和④中，有且只有一个成立。

又因为四位老师中只有一个人的推测成立，因此②③均不成立，即有人考上了清华，且这个人是小南。

因此，如果小北也考上了清华，则只有刘老师的推测成立。

所以，E成立。