

停机问题与判定问题

(Halting Problem & Decision Problem)

熊 明

mingshone@163.com

South China Normal University

主要内容

① 通用图灵机

② 停机问题

③ 判定问题

主要内容

① 通用图灵机

② 停机问题

③ 判定问题

通用图灵机 (UTM)

- 在 1936 年那篇著名的论文中，图灵特别地给出了这样一个图灵机（程序）：
- 这个程序能模拟任何图灵机（程序）的任何执行情况！
- 这样的图灵机被认为“通用图灵机”（universal Turing machine）

6. *The universal computing machine.*

It is possible to invent a single machine which can be used to compute any computable sequence. If this machine \mathcal{U} is supplied with a tape on the beginning of which is written the S.D of some computing machine \mathcal{M} ,

SER. 2. VOL. 42. NO. 2144.

R

通用图灵机 (UTM)

- 在 1936 年那篇著名的论文中，图灵特别地给出了这样一个图灵机（程序）：
- 这个程序能模拟任何图灵机（程序）的任何执行情况！
- 这样的图灵机被认为“通用图灵机” (universal Turing machine)

6. *The universal computing machine.*

It is possible to invent a single machine which can be used to compute any computable sequence. If this machine \mathcal{U} is supplied with a tape on the beginning of which is written the S.D of some computing machine \mathcal{M} ,

SER. 2. VOL. 42. NO. 2144.

R

通用图灵机 (UTM)

- 在 1936 年那篇著名的论文中，图灵特别地给出了这样一个图灵机（程序）：
- 这个程序能模拟任何图灵机（程序）的任何执行情况！
- 这样的图灵机被认为“通用图灵机”（universal Turing machine）

6. *The universal computing machine.*

It is possible to invent a single machine which can be used to compute any computable sequence. If this machine \mathcal{U} is supplied with a tape on the beginning of which is written the S.D of some computing machine \mathcal{M} ,

SER. 2. VOL. 42. NO. 2144.

R

通用图灵机 (UTM)

- 在 1936 年那篇著名的论文中，图灵特别地给出了这样一个图灵机（程序）：
- 这个程序能模拟任何图灵机（程序）的任何执行情况！
- 这样的图灵机被认为“通用图灵机”（universal Turing machine）

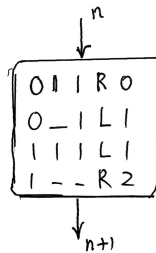
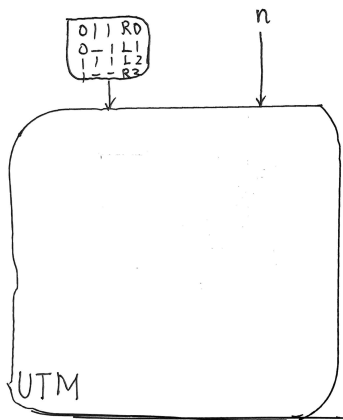
6. *The universal computing machine.*

It is possible to invent a single machine which can be used to compute any computable sequence. If this machine \mathcal{U} is supplied with a tape on the beginning of which is written the S.D of some computing machine \mathcal{M} ,

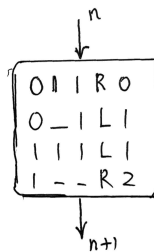
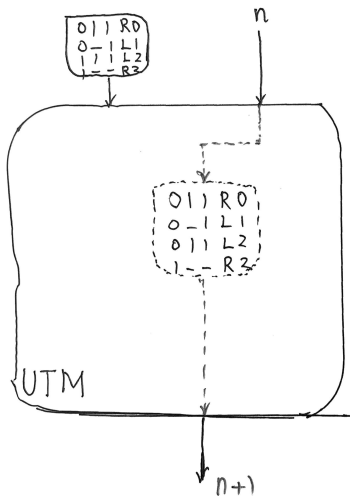
SER. 2. VOL. 42. NO. 2144.

R

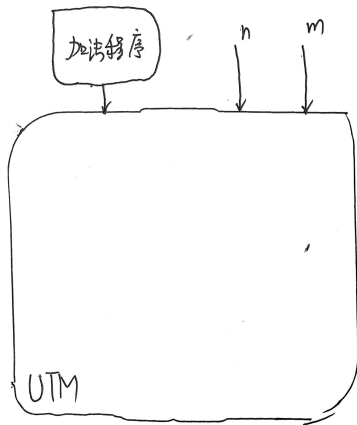
通用图灵机图示



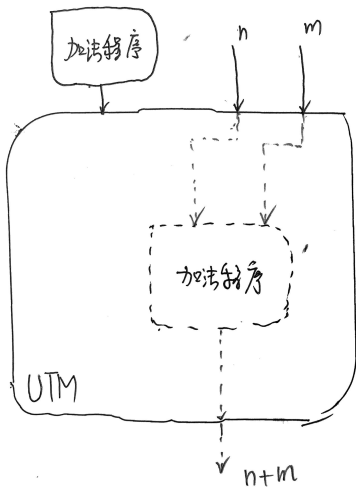
通用图灵机图示



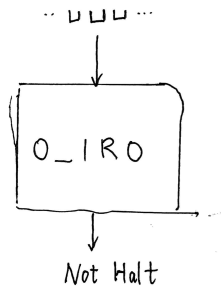
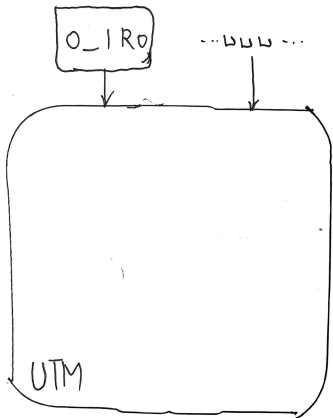
通用图灵机图示



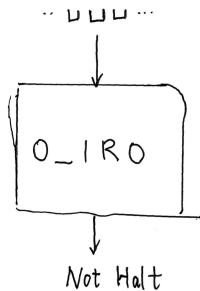
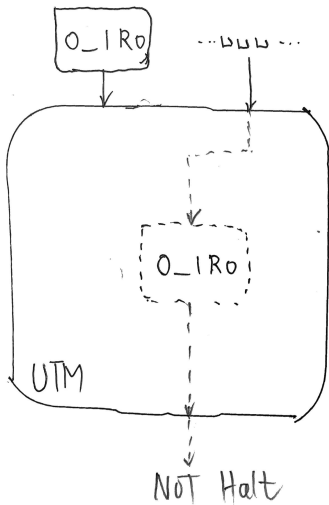
通用图灵机图示



通用图灵机图示

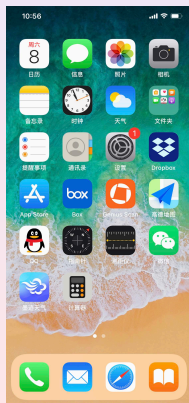


通用图灵机图示



通用图灵机的重要性

- 通用图灵机奠定了“存储程序电脑”的思想基础。
- 每个通用图灵机可看做是一个操作系统！



主要内容

① 通用图灵机

② 停机问题

③ 判定问题

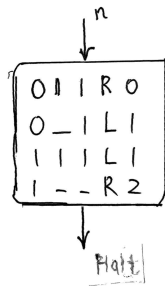
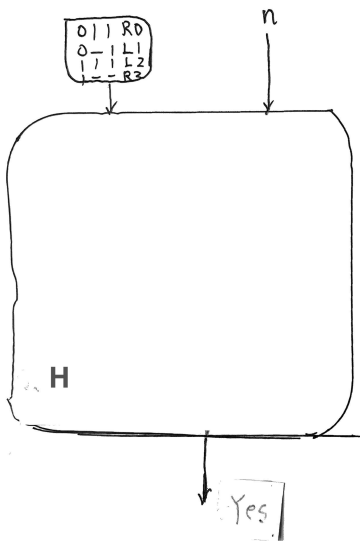
停机问题

是否存在一台图灵机，使用它可以判断任何一台图灵机在某个输入下停机与否？

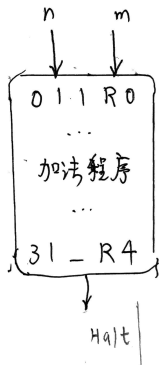
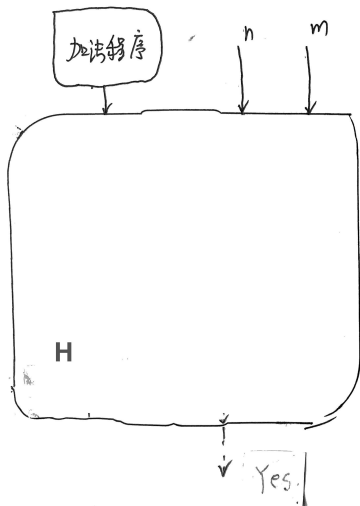
即：是否存在图灵机 H ，对其输入图灵机（的程序或编码） x ，输入为 y ，

- 如果图灵机 x 对输入 y 停机，则 H 输出 Yes（或者 1）；
- 如果图灵机 x 对输入 y 不停机，则 H 输出 No（或者 0）。

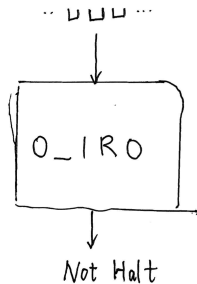
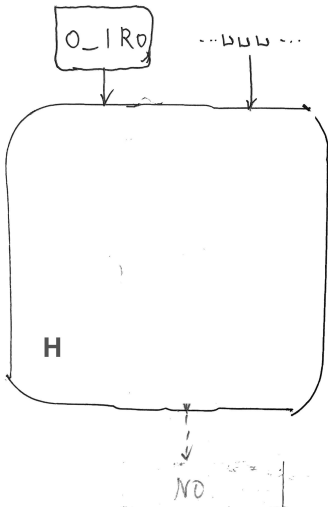
停机问题图示



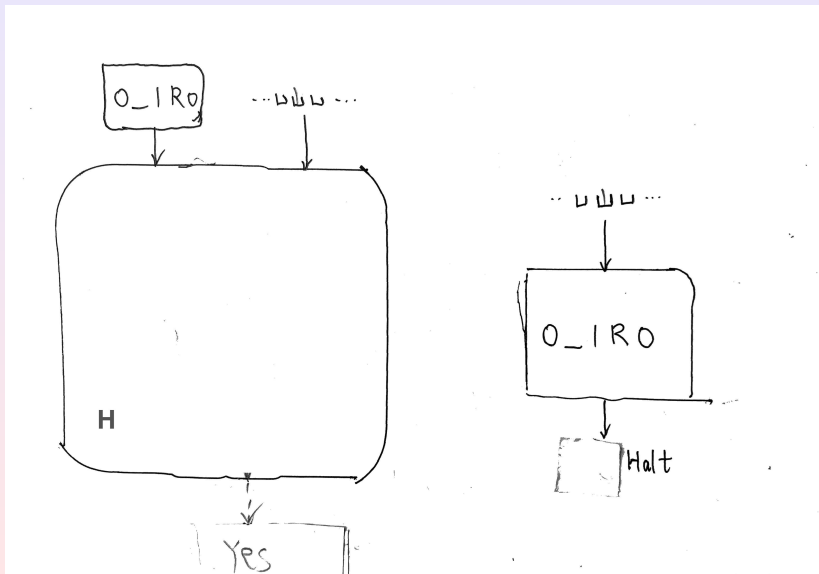
停机问题图示



停机问题图示

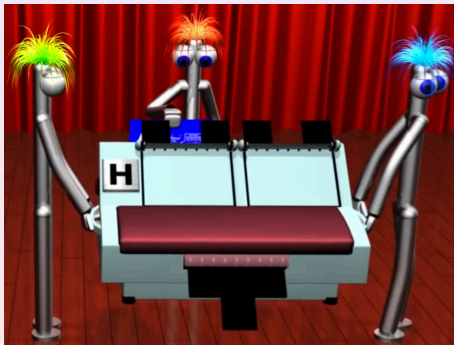


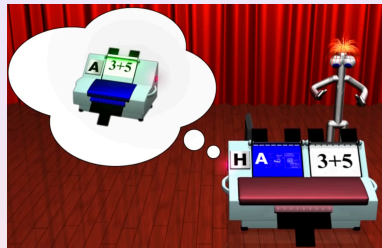
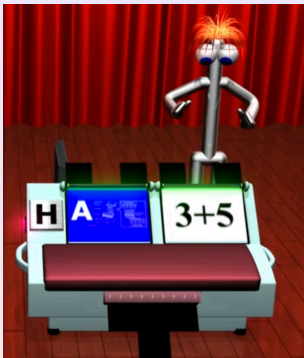
停机问题图示

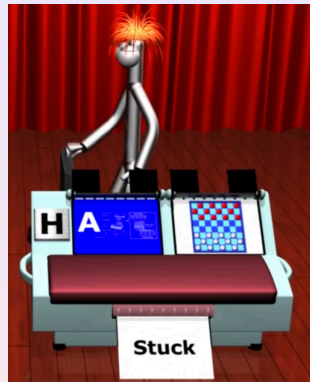
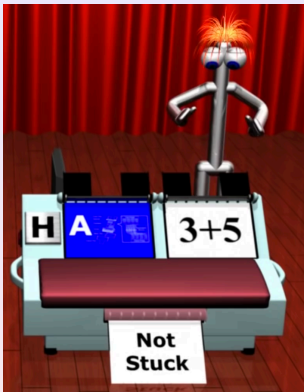


停机问题不可解

- 没有图灵机能用于判定停机问题!
- 证明思想：假设存在这样的图灵机，设这个图灵机为 H 。





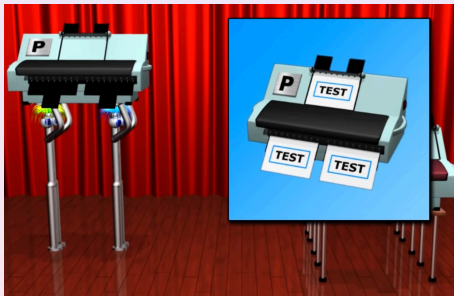


构造过程

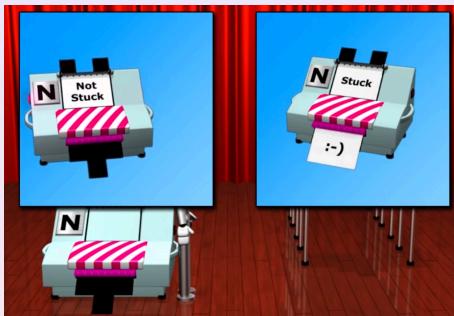
需要两台图灵机作为辅助：

- 复制机
- 反转机

复制机

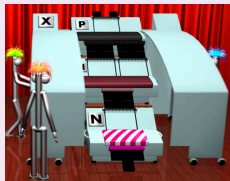


反转机

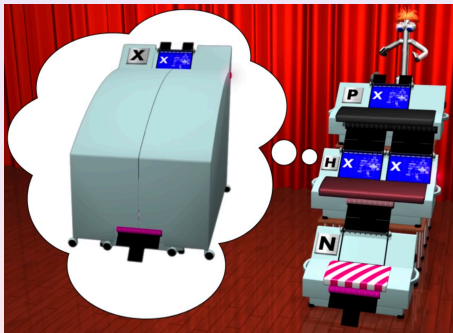


- 若输入为 stuck，则停机并输出笑脸。
- 若输入为 not stuck，则不停机。

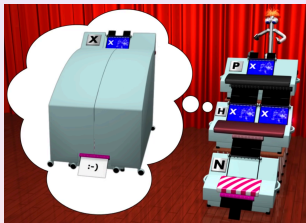
组合



判断

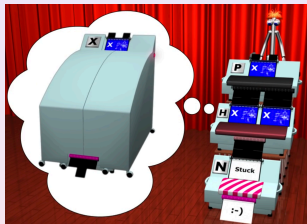
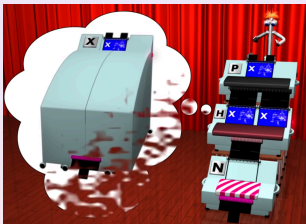


第一种情况



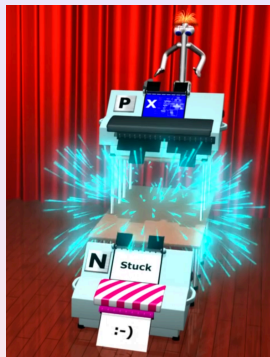
对图灵机 X 输入 X ，假设会停机，则……

第二种情况




对图灵机 X 输入 X ，假设不会停机，则……

结论



图灵机 H 不存在，停机问题不可解。相关视频：

 [动画通俗解释-停机问题不可解](#)

主要内容

① 通用图灵机

② 停机问题

③ 判定问题

Hilbert 的 Entscheidungsproblem

1928 年, Hilbert 提出如下 Entscheidungsproblem (判定问题):¹

是否存在一种程序 (或算法、机械方法) 用于判定一阶公式是否有效, 使得当输入此公式时,

- 若此公式是有效时, 此程序回答“YES”;
- 若此公式是无效时, 此程序回答“NO”?

¹David Hilbert and Wilhelm Ackermann (1928). Grundzüge der theoretischen Logik (Principles of Mathematical Logic). Springer-Verlag. 

回答此问题的主要思路

- 程序的数学模型（比如，图灵机）
- 寻找此数学模型中的程序终止（停机）问题，把此归约为上述判定问题

Entscheidungsproblem 的再表述

是否存在一个图灵机（程序）用于判定一阶公式是否有效，使得当输入此公式时，

- 若此公式是有效时，此程序回答“YES”；
- 若此公式是无效时，此程序回答“NO”？

问题的归约

图灵机 x 在输入为 y 时停机，当且仅当下面的推理是有效的：

- 前提：
 - (图灵机的) 初始格局是 $_q_0 \underbrace{11\dots 1}_{y+1 \text{ 次}} _$ (初始状态是 q_0 ，且读写头指向 q_0 右侧的那个符号，此处是 1)
 - (对应于图灵机 x 的指令 $q_i S_j S_k a_l q_m$) 对任意的 t ，如果在 t 步的格局是 $\dots q_i S_j \dots$ ，那么在 $t+1$ 步的格局就是 $\dots q_m S_k \dots$ ²
- 结论：存在这样的 t ，在 t 步的格局是 $\dots q_i S_j \dots$ ，并且图灵机 x 的指令没有形如 $q_i S_j S_k a_l q_m$ 的指令。

²从第 t 步到第 $t+1$ 步，需要按照动作 a_l 分情况写出前后两种格局的推出关系，这里只明确思想，细节略去。

问题的归约

图灵机 x 在输入为 y 时停机，当且仅当下面的推理是有效的：

- 前提：
 - (图灵机的) 初始格局是 $_q_0 \underbrace{11\dots 1}_{y+1 \text{ 次}} _$ (初始状态是 q_0 ，且读写头指向 q_0 右侧的那个符号，此处是 1)
 - (对应于图灵机 x 的指令 $q_i S_j S_k a_l q_m$) 对任意的 t ，如果在 t 步的格局是 $\dots q_i S_j \dots$ ，那么在 $t+1$ 步的格局就是 $\dots q_m S_k \dots$ ²
- 结论：存在这样的 t ，在 t 步的格局是 $\dots q_i S_j \dots$ ，并且图灵机 x 的指令没有形如 $q_i S_j S_k a_l q_m$ 的指令。

²从第 t 步到第 $t+1$ 步，需要按照动作 a_l 分情况写出前后两种格局的推出关系，这里只明确思想，细节略去。

问题的归约

图灵机 x 在输入为 y 时停机，当且仅当下面的推理是有效的：

- 前提：
 - (图灵机的) 初始格局是 $_q_0 \underbrace{11\dots 1}_{y+1 \text{ 次}} _$ (初始状态是 q_0 ，且读写头指向 q_0 右侧的那个符号，此处是 1)
 - (对应于图灵机 x 的指令 $q_i S_j S_k a_l q_m$) 对任意的 t ，如果在 t 步的格局是 $\dots q_i S_j \dots$ ，那么在 $t+1$ 步的格局就是 $\dots q_m S_k \dots$ ²
- 结论：存在这样的 t ，在 t 步的格局是 $\dots q_i S_j \dots$ ，并且图灵机 x 的指令没有形如 $q_i S_j S_k a_l q_m$ 的指令。

²从第 t 步到第 $t+1$ 步，需要按照动作 a_l 分情况写出前后两种格局的推出关系，这里只明确思想，细节略去。

问题的归约

图灵机 x 在输入为 y 时停机，当且仅当下面的推理是有效的：

- 前提：
 - (图灵机的) 初始格局是 $_q_0 \underbrace{11\dots 1}_{y+1 \text{ 次}} _$ (初始状态是 q_0 ，且读写头指向 q_0 右侧的那个符号，此处是 1)
 - (对应于图灵机 x 的指令 $q_i S_j S_k a_l q_m$) 对任意的 t ，如果在 t 步的格局是 $\dots q_i S_j \dots$ ，那么在 $t+1$ 步的格局就是 $\dots q_m S_k \dots$ ²
- 结论：存在这样的 t ，在 t 步的格局是 $\dots q_i S_j \dots$ ，并且图灵机 x 的指令没有形如 $q_i S_j S_k a_l q_m$ 的指令。

²从第 t 步到第 $t+1$ 步，需要按照动作 a_l 分情况写出前后两种格局的推出关系，这里只明确思想，细节略去。

前面提到的推理很容易用一阶公式进行表达，于是：**图灵机 x 在输入为 y 时停机，当且仅当某个用一阶语言表达的推理形式（与 x 和 y 相关）是有效的。**

假设存在一个图灵机用于判定一阶语言中公式（或推理形式）是否有效。

注意，蓝字部分中的关系是充分必要的，因此，上述用于判定公式是否有效的图灵机同样可用于判定停机问题，即对任意 x 、 y ，判定图灵机 x 在输入为 y 时是否停机。但已经知道，不存在图灵机用于判定停机问题，所以，假设不成立！

前面提到的推理很容易用一阶公式进行表达，于是：**图灵机 x 在输入为 y 时停机，当且仅当某个用一阶语言表达的推理形式（与 x 和 y 相关）是有效的。**

假设存在一个图灵机用于判定一阶语言中公式（或推理形式）是否有效。

注意，蓝字部分中的关系是充分必要的，因此，上述用于判定公式是否有效的图灵机同样可用于判定停机问题，即对任意 x 、 y ，判定图灵机 x 在输入为 y 时是否停机。但已经知道，不存在图灵机用于判定停机问题，所以，假设不成立！

前面提到的推理很容易用一阶公式进行表达，于是：**图灵机 x 在输入为 y 时停机，当且仅当某个用一阶语言表达的推理形式（与 x 和 y 相关）是有效的。**

假设存在一个图灵机用于判定一阶语言中公式（或推理形式）是否有效。

注意，蓝字部分中的关系是充分必要的，因此，上述用于判定公式是否有效的图灵机同样可用于判定停机问题，即对任意 x 、 y ，判定图灵机 x 在输入为 y 时是否停机。但已经知道，不存在图灵机用于判定停机问题，所以，假设不成立！

前面提到的推理很容易用一阶公式进行表达，于是：**图灵机 x 在输入为 y 时停机，当且仅当某个用一阶语言表达的推理形式（与 x 和 y 相关）是有效的。**

假设存在一个图灵机用于判定一阶语言中公式（或推理形式）是否有效。

注意，蓝字部分中的关系是充分必要的，因此，上述用于判定公式是否有效的图灵机同样可用于判定停机问题，即对任意 x 、 y ，判定图灵机 x 在输入为 y 时是否停机。但已经知道，不存在图灵机用于判定停机问题，所以，假设不成立！

结论

- 不存在图灵机（算法）用来判定一阶公式的有效性问题！
- 这个结论一般称为：**一阶逻辑的不可判定性**。
- 注意，所谓“不可判定”不是指有哪个公式的有效性不能被判定，而是指不存在算法用于判定**每个**一阶公式的有效性。

结论

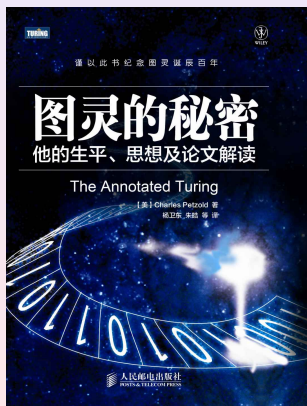
- 不存在图灵机（算法）用来判定一阶公式的有效性问题！
- 这个结论一般称为：**一阶逻辑的不可判定性**。
- 注意，所谓“不可判定”不是指有哪个公式的有效性不能被判定，而是指不存在算法用于判定**每个**一阶公式的有效性。

结论

- 不存在图灵机（算法）用来判定一阶公式的有效性问题！
- 这个结论一般称为：**一阶逻辑的不可判定性**。
- 注意，所谓“不可判定”不是指有哪个公式的有效性不能被判定，而是指不存在算法用于判定**每个**一阶公式的有效性。

推荐阅读

Charles Petzold, 《图灵的秘密：他的生平、思想和论文解读》，杨东卫等（译），人民邮电出版社，2012。



Thanks for your attention!
Q & A