哥德尔不完全性定理
(Gödel's Incompleteness Theorems)

熊 明
mingshone@163.com

South China Normal University

主要内容

主要内容

在数学中没有不可知

每个数学问题都可解这一信念对数学工作者而言是强大的驱动力。在我们中间，常常听到这样的呼声：这里有一个数学问题，去找出它的答案！你能通过纯思维找到它，因为**在数学中没有不可知**。

——希尔伯特

This conviction of the solvability of every mathematical problem is a powerful incentive to the worker. We hear within us the perpetual call: There is the problem. Seek its solution. You can find it by pure reason, for ***in mathematics there is no ignorabimus****.*

希尔伯特论公理系统

在研究一门科学的基础时，我们必须建立一套公理系统，它包含着对这门科学基本概念之间所存在的关系的确切而完备的描述。如此建立起来的公理同时也是这些基本概念的定义，并且，我们正在检验其基础的科学领域里的任何一个命题，除非它能够从这些公理**通过有限逻辑推理**而得到。否则，就不能认为是正确的。

希尔伯特《数学问题》(*1900* 年)

数学家

……*the typical working mathematician is a Platonist on weekdays and a formalist on Sundays.*

P. J. Davis and R. Hersh, *The Mathematical Experience*, New York: Penguin Books, 1983, p. 321.

典型的职业数学家平日里是柏拉图主义者，在周末则是形式主义者。

菲利普·戴维斯、鲁本·赫什，《数学经验》（1983 年）

希尔伯特规划 (Hilbert's Program)

主要目标

- 完全性证明：一切算术真命题都可经过皮亚诺公理理论推导出来。
- 一致性证明：皮亚诺公理的无矛盾性可以从这些公理本身得到证明。
- 可判定性证明：存在算法，可用于判定算术命题为真还是为假。

希尔伯特规划 (Hilbert's Program)

主要目标

- 完全性证明：一切算术真命题都可经过皮亚诺公理理论推导出来。
- 一致性证明：皮亚诺公理的无矛盾性可以从这些公理本身得到证明。
- 可判定性证明：存在算法，可用于判定算术命题为真还是为假。

希尔伯特规划 (Hilbert's Program)

主要目标

- 完全性证明：一切算术真命题都可经过皮亚诺公理理论推导出来。
- 一致性证明：皮亚诺公理的无矛盾性可以从这些公理本身得到证明。
- 可判定性证明：存在算法，可用于判定算术命题为真还是为假。

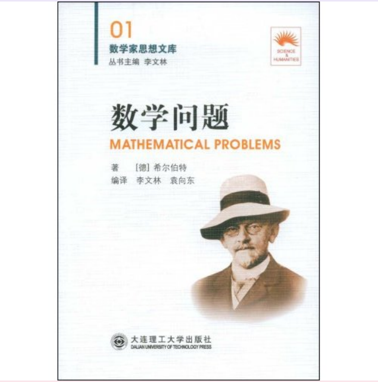
希尔伯特规划 (Hilbert's Program)

主要目标

- 完全性证明：一切算术真命题都可经过皮亚诺公理理论推导出来。
- 一致性证明：皮亚诺公理的无矛盾性可以从这些公理本身得到证明。
- 可判定性证明：存在算法，可用于判定算术命题为真还是为假。

希尔伯特《数学问题》中的第二问题

- 使用有穷推理的逻辑方法证明算术公理没有矛盾？



- “证明算术公理是无矛盾的，即基于这些公理的有穷步逻辑推导都不会导致矛盾的结论。”
（To prove that they [the arithmetical axioms] are not contradictory, that is, that a definite number of logical steps based upon them can never lead to contradictory results. ）

- 证明过程必须符合“严格性要求”：只能通过有限个前提进行有限步逻辑推理。
  （it shall be possible to establish the correctness of the solution **by means of a finite number of steps based upon a finite number of hypotheses** ······This requirement of logical deduction by means of a finite number of processes is simply the requirement of rigor in reasoning. ）

希尔伯特之梦

- 希尔伯特在其《数学问题》的讲演中充满希望地指出：

  我坚信，通过对无理数理论中熟知的推理方法的仔细研究和适当变更，**一定能够找到算术公理相容性的直接证明。**

  (**I am convinced that it must be possible to find a direct proof for the compatibility of the arithmetical axioms**, by means of a careful study and suitable modification of the known methods of reasoning in the theory of irrational numbers.)

Wir müssen wissen, Wir werden wissen.

（我们必须知道，我们必将知道。）

希尔伯特之墓（哥廷根）

David Hilbert’s gravestone in Göttingen, Germany

主要内容

（一阶）算术语言 $\mathcal{L}_{\mathbb{N}}$

初始符号表：

- 个体变元：v_0、v_1、$\cdots$、v_n、$\cdots$
- 联结词：$\neg$、$\vee$、$\wedge$、$\rightarrow$
- 量词：$\forall$（任意...）、$\exists$（存在...）
- 谓词：$\equiv$
- 运算符：一元 S（表示后继运算 $'$）、二元 $+$（表示加法 $+$）和二元 $\cdot$（表示乘法 $\times$），
- 个体常元：$\mathbf{0}$（读作“零”或“零元”，表示数 0）
- 辅助符：右括弧)、左括弧 (

算术的公理系统

（皮亚诺）一阶算术

- 公理
  - 关于等词符的公理
  - 关于算术运算符的公理
- 逻辑规则

关于等词符的公理

- $\forall v(v \equiv v)$
- $\forall v_1 \forall v_2 (v_1 \equiv v_2 \to v_2 \equiv v_1)$
- $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 ((v_1 \equiv v_2) \wedge (v_2 \equiv v_3) \to v_1 \equiv v_3)$
- $\forall v_1 \forall v_2 (v_1 \equiv v_2 \to S\, v_1 \equiv S\, v_2)$ （等量的后继仍为等量）
- $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4 (v_1 \equiv v_2 \wedge v_3 \equiv v_4 \to v_1 + v_3 \equiv v_2 + v_4)$ （等量加等量，其和仍相等）
- $\forall v_1 \forall v_2 \forall v_3 \forall v_4 (v_1 \equiv v_2 \wedge v_3 \equiv v_4 \to v_1 \cdot v_3 \equiv v_2 \cdot v_4)$

关于算术运算符的公理

- $\forall v(\neg Sv \equiv \mathbf{0})$
- $\forall v_1 \forall v_2 (Sv_1 \equiv Sv_2 \rightarrow v_1 \equiv v_2)$
- $\forall v(v + \mathbf{0} \equiv v)$
- $\forall v_1 \forall v_2 (v_1 + Sv_2 \equiv S(v_1 + v_2))$
- $\forall v(v \cdot \mathbf{0} \equiv \mathbf{0})$
- $\forall v_1 \forall v_2 (v_1 \cdot Sv_2 \equiv (v_1 \cdot v_2) + v_1)$

归纳公理模式

- $A(\mathbf{0}/x) \wedge \forall x(A(x) \to A(Sx/x)) \to \forall x A(x)$

逻辑规则

- 合取规则：
  - $(\wedge^+)$ 从 A 和 B 可得到 $A \wedge B$
  - $(\wedge^-)$ 从 $A \wedge B$ 可得到 A，亦可得到 B
- 蕴涵规则：
  - $(\rightarrow^+)$ ……
  - $(\rightarrow^-)$ 从 $A \rightarrow B$ 和 A 可得到 B
- 全称量词规则：
  - $(\forall^+)$ ……
  - $(\forall^-)$ 从 $\forall x\, A(x)$ 可得到 $A(t/x)$
- ……

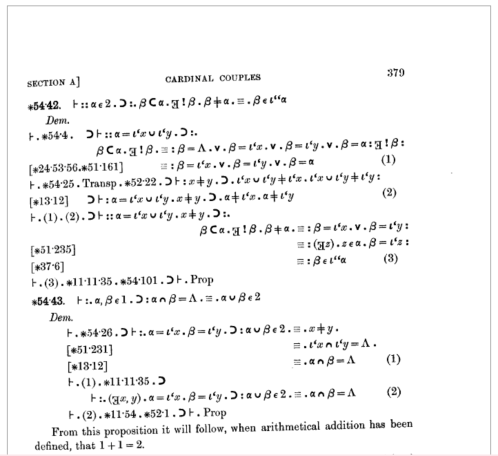
可证公式

一个公式（在皮亚诺算术中）是**可证的**：从上述公理（中的某几条）出发通过**有限逻辑推理**可得到这个公式。更具体地说，从上述公理（中的某几条）出发，通过有穷多次使用逻辑规则可得到这个公式。

- 公式 $S\mathbf{0}+S\mathbf{0}\equiv SS\mathbf{0}$（$1+1=2$） 可证的

$$
\begin{array}{lll}
(1) & \forall v_1\,(v_1+\mathbf{0}\equiv v_1) & \text{（公理）}\\
(2) & S\mathbf{0}+\mathbf{0}\equiv S\mathbf{0} & (\forall^- : (1))\\
(3) & \forall v_1\forall v_2(v_1\equiv v_2\to S\,v_1\equiv S\,v_2) & \text{（公理）}\\
(4) & (S\mathbf{0}+\mathbf{0}\equiv S\mathbf{0})\to(S(S\mathbf{0}+\mathbf{0})\equiv SS\mathbf{0}) & (\forall^- : (3))\\
(5) & S(S\mathbf{0}+\mathbf{0})\equiv SS\mathbf{0} & (\to^- : (2),(4))\\
(6) & \forall v_1\forall v_2(v_1+Sv_2\equiv S(v_1+v_2)) & \text{（公理）}\\
(7) & S\mathbf{0}+S\mathbf{0}\equiv S(S\mathbf{0}+\mathbf{0}) & (\forall^- : (6))\\
(8) & \forall v_1\forall v_2\forall v_3((v_1\equiv v_2)\wedge(v_2\equiv v_3)\to v_1\equiv v_3) & \text{（公理）}\\
(9) & (S\mathbf{0}+S\mathbf{0}\equiv S(S\mathbf{0}+\mathbf{0}))\wedge(S(S\mathbf{0}+\mathbf{0})\equiv SS\mathbf{0})\to(S\mathbf{0}+S\mathbf{0}\equiv & \\
 & SS\mathbf{0}) & (\forall^- : (8))\\
(10) & (S\mathbf{0}+S\mathbf{0}\equiv S(S\mathbf{0}+\mathbf{0}))\wedge(S(S\mathbf{0}+\mathbf{0})\equiv SS\mathbf{0}) & (\wedge^+ : (5),(7))\\
(11) & S\mathbf{0}+S\mathbf{0}\equiv SS\mathbf{0} & (\to^- : (9),(10))
\end{array}
$$

《数学原理》中 $1 + 1 = 2$ 的证明



SECTION A] CARDINAL COUPLES 379

∗54·42. $\vdash :: \alpha \in 2 . \supset :. \beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv . \beta \in \iota``\alpha$

Dem.

$\vdash . *54\cdot4 . \quad \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \equiv : \beta = \Lambda . \vee . \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha : \exists ! \beta :$

[∗24·53·56.∗51·161] $\equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y . \vee . \beta = \alpha$ (1)

$\vdash . *54\cdot25 . \text{Transp} . *52\cdot22 . \supset \vdash : x \neq y . \supset . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`x . \iota`x \cup \iota`y \neq \iota`y :$

[∗13·12] $\supset \vdash : \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset . \alpha \neq \iota`x . \alpha \neq \iota`y$ (2)

$\vdash . (1) . (2) . \supset \vdash :: \alpha = \iota`x \cup \iota`y . x \neq y . \supset :.$

$\beta \subset \alpha . \exists ! \beta . \beta \neq \alpha . \equiv : \beta = \iota`x . \vee . \beta = \iota`y :$

[∗51·235] $\equiv : (\exists z) . z \in \alpha . \beta = \iota`z :$

[∗37·6] $\equiv : \beta \in \iota``\alpha$ (3)

$\vdash . (3) . *11\cdot11\cdot35 . *54\cdot101 . \supset \vdash . \text{Prop}$

∗54·43. $\vdash :. \alpha, \beta \in 1 . \supset : \alpha \cap \beta = \Lambda . \equiv . \alpha \cup \beta \in 2$

Dem.

$\vdash . *54\cdot26 . \supset \vdash :. \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . x \neq y .$

[∗51·231] $\equiv . \iota`x \cap \iota`y = \Lambda .$

[∗13·12] $\equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (1)

$\vdash . (1) . *11\cdot11\cdot35 . \supset$

$\vdash :. (\exists x, y) . \alpha = \iota`x . \beta = \iota`y . \supset : \alpha \cup \beta \in 2 . \equiv . \alpha \cap \beta = \Lambda$ (2)

$\vdash . (2) . *11\cdot54 . *52\cdot1 . \supset \vdash . \text{Prop}$

From this proposition it will follow, when arithmetical addition has been defined, that $1 + 1 = 2$.

在《数学原理》第一卷（第一版），第 379 页!!!

主要内容

众所周知，数学向更精确方向的发展，已然导致大片数学被形式化，人们仅凭很少的机械规则就足于证明任何定理。当世最全之形式系统有二：一为数学原理系统 *(PM)*，另一为 *Zermelo-Fraenkel* 公理集合论系统（由 *J. von Neumann* 进一步发展）。此二系统如此全面，以致于现今在数学中使用的证明方法都被形式化，即被归约为几条公理和推理规则。人们由此推测，这些公理和规则足以判定在这些系统中形式可表达的每个数学问题。下文将证明事实并非如此。正好相反，在刚提到的两个系统中存在相对简单的数论问题，它们不能通过公理来判定。

哥德尔（1931）

哥德尔第一不完全性定理，语义版本

如果（皮亚诺）算术公理没有矛盾，那么存在这样一个算术命题，它是真的，但不能通过算术公理证明出来！

哥德尔-罗塞尔不完全性定理

如果皮亚诺算术公理没有矛盾，那么存在这样一个算术命题，使得它和它的否定都不能通过算术公理证明出来！

哥德尔第一不完全性定理，强版本

在任意包含了算术公理在内的公理体系中，如果此公理体系没有矛盾并且其中公理可由图灵机打印出来，那么一定存在这样的命题，它和它的否定在此公理系统中都不可证。

哥德尔第二不完全性定理

哥德尔第二不完全性定理，1931 年

如果算术公理没有矛盾，那么算术公理没有矛盾这个命题本身**不可能**通过算术公理证明出来！

不完全性定理的意义：公理的局限性

- （皮亚诺）算术公理系统 = 算术理论的“公理化”
- 哥德尔第一不完全性定理表明：如果算术理论是“公理化”的，那么它不可能推导出所有的算术真理。
- 数学离不开公理来证明定理，但数学家必须意识到公理的局限性！

不完全性定理的意义：公理的局限性

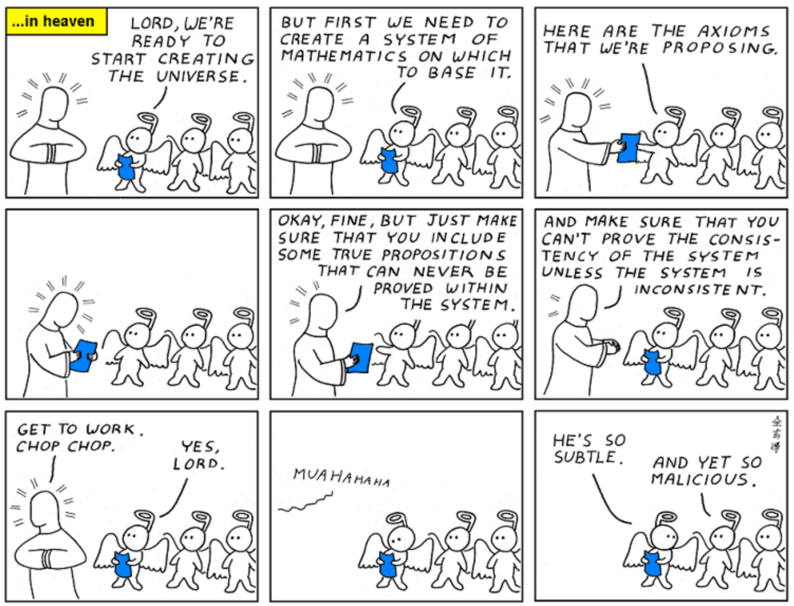
- （皮亚诺）算术公理系统 = 算术理论的“公理化”
- 哥德尔第一不完全性定理表明：如果算术理论是“公理化”的，那么它不可能推导出所有的算术真理。
- 数学离不开公理来证明定理，但数学家必须意识到公理的局限性！

不完全性定理的意义：公理的局限性

- （皮亚诺）算术公理系统 = 算术理论的“公理化”
- 哥德尔第一不完全性定理表明：如果算术理论是“公理化”的，那么它不可能推导出所有的算术真理。
- 数学离不开公理来证明定理，但数学家必须意识到公理的局限性！

不完全性定理的意义：数学活动的创造性

- 数学真理的发现本质上是一项创造性活动，没有任何图灵机可以替代。
- 数学真理的获取包含了新公理的发现。


...in heaven
LORD, WE'RE READY TO START CREATING THE UNIVERSE.
BUT FIRST WE NEED TO CREATE A SYSTEM OF MATHEMATICS ON WHICH TO BASE IT.
HERE ARE THE AXIOMS THAT WE'RE PROPOSING.
OKAY, FINE, BUT JUST MAKE SURE THAT YOU INCLUDE SOME TRUE PROPOSITIONS THAT CAN NEVER BE PROVED WITHIN THE SYSTEM.
AND MAKE SURE THAT YOU CAN'T PROVE THE CONSISTENCY OF THE SYSTEM UNLESS THE SYSTEM IS INCONSISTENT.
GET TO WORK. CHOP CHOP.
YES, LORD.
MUAHAHAHAHA
HE'S SO SUBTLE.
AND YET SO MALICIOUS.

主要内容

库尔特·哥德尔（Kurt Gödel）

- Born: 28 April 1906 in Brünn, Austria-Hungary (now Brno, Czech Republic)
- Died: 14 Jan 1978 in Princeton, New Jersey, USA

哥德尔和他的妻子 Adele（维也纳，1938）

哥德尔和爱因斯坦（普林斯顿，1950）

哥德尔的主要贡献

- **the completeness of logic**, so-called “Gödel Completeness Theorem”, doctoral dissertation, 1929
- **the incompleteness of number theory**, so-called “Gödel first and second Incompleteness Theorems”, a solution to No. 2 Problem of Hilbert’s Problems, 1931

哥德尔的主要贡献

- **constructivity**, a fundamental notion in axiomatic set theory, 1937
- **the consistency of the axiom of choice and the continuum hypothesis**, a partial solution to No. 1 Problem of Hilbert's Problems, 1937
- **a cosmological models for Einstein's equations**, so-called "Gödel Universe", 1947

《时代》杂志第 100 期海选

二十世纪二十位最有影响的思想家（20 most influential thinkers of the 20th century）

- Technology - 6: Tim Berners-Lee (蒂姆 · 伯纳斯 · 李, WWW), plastic, airplane, rocket, TV, William Shockley (transistor)
- Biology and Medicine - 4: psychoanalysis, penicillin, James Watson and Francis Crick (the double helix pattern of DNA), Jonas Salk (polio vaccine)
- Physics and Astronomy - 3: Albert Einstein, Enrico Fermi, Edwin Hubble

《时代》杂志第 100 期海选

二十世纪二十位最有影响的思想家

- Anthropology - 1: The Leakeys
- Economy - 1: John Maynard Keynes
- Environment - 1: Rachel Carson
- Psychology - 1: Piaget
- Computer Science - 1: Turing, a logician
- Mathematics - 1: Gödel, a logician
- Philosophy - 1: Wittgenstein, who began as a logician

《时代》杂志第 100 期海选

二十世纪二十位最有影响的思想家

- Anthropology - 1: The Leakeys
- Economy - 1: John Maynard Keynes
- Environment - 1: Rachel Carson
- Psychology - 1: Piaget
- Computer Science - 1: Turing, a logician
- Mathematics - 1: Gödel, a logician
- Philosophy - 1: Wittgenstein, who began as a logician

《时代》杂志第 100 期海选

二十世纪二十位最有影响的思想家

- Anthropology - 1: The Leakeys
- Economy - 1: John Maynard Keynes
- Environment - 1: Rachel Carson
- Psychology - 1: Piaget
- Computer Science - 1: Turing, a logician
- Mathematics - 1: Gödel, a logician
- Philosophy - 1: Wittgenstein, who began as a logician

«时代» 杂志第 100 期海选

二十世纪二十位最有影响的思想家

- Anthropology - 1: The Leakeys
- Economy - 1: John Maynard Keynes
- Environment - 1: Rachel Carson
- Psychology - 1: Piaget
- Computer Science - 1: Turing, a logician
- Mathematics - 1: Gödel, a logician
- Philosophy - 1: Wittgenstein, who began as a logician

《时代》杂志第 100 期海选

二十世纪二十位最有影响的思想家

- Anthropology - 1: The Leakeys
- Economy - 1: John Maynard Keynes
- Environment - 1: Rachel Carson
- Psychology - 1: Piaget
- Computer Science - 1: Turing, a logician
- Mathematics - 1: Gödel, a logician
- Philosophy - 1: Wittgenstein, who began as a logician

《时代》杂志第 100 期海选

二十世纪二十位最有影响的思想家

- Anthropology - 1: The Leakeys
- Economy - 1: John Maynard Keynes
- Environment - 1: Rachel Carson
- Psychology - 1: Piaget
- Computer Science - 1: Turing, a logician
- Mathematics - 1: Gödel, a logician
- Philosophy - 1: Wittgenstein, who began as a logician

《时代》杂志第 100 期海选

二十世纪二十位最有影响的思想家

- Anthropology - 1: The Leakeys
- Economy - 1: John Maynard Keynes
- Environment - 1: Rachel Carson
- Psychology - 1: Piaget
- Computer Science - 1: Turing, a logician
- Mathematics - 1: Gödel, a logician
- Philosophy - 1: Wittgenstein, who began as a logician

One can be sure that if God does actually exists then Gödel is in direct contact with him.

—— *A. Mostowski*

对哥德尔及其贡献的若干评论

- 爱因斯坦：哥德尔是“自亚里士多德以来比任何人都有力地动摇了逻辑基础”的大人物。
- 蒯因（W van O.Quine, 美国著名哲学家）：哥德尔是“20 世纪最有意义的数学真理的发现者”。
- 奥本海默（R.Oppenheimer）:“你的病人是亚里士多德以来最大的逻辑学家。”
- 王浩（Wang Hao，美籍华人逻辑学家）：哥德尔定理“好比弗洛依德的心理学，爱因斯坦的相对论，玻尔的互补性原理，海森堡的测不准原理，凯恩斯的经济学和 DNA 的双螺旋”。

评论

Kurt Gödel was the most outstanding logician of the twentieth century, famous for his hallmark works on the completeness of logic, the incompleteness of number theory, and the consistency of the axiom of choice and the continuum hypothesis. He is also noted for his work on constructivity, the decision problem, and the foundations of computability theory, as well as for the strong individuality of his writings on the philosophy of mathematics. He is less well known for his discovery of unusual cosmological models for Einstein's equations, in theory permitting time travel into the past.

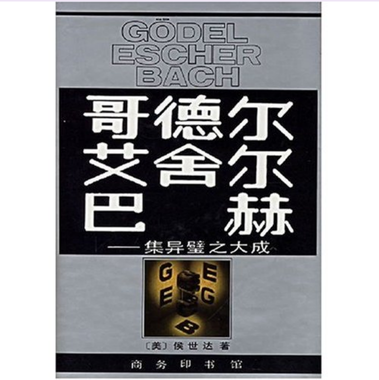
——*Editors of Kurt Gödel: Collected Works, Vol.I/II/III/IV/V. (S.Feferman et al.,editors), Oxford University Press. 1986/1990/1995/2003/2003.*

推荐读物：传记

- 《哥德尔: 逻辑的困境》，约翰 · 道森著，唐璐译，湖南科技出版社 (2009 年)

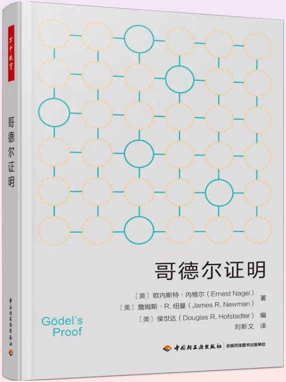
推荐读物：奇书

- 《哥德尔 · 艾舍尔 · 巴赫: 集异璧之大成》，侯世达著，郭维德等译，商务印书馆 (1997 年)



推荐读物：科普

- 《哥德尔证明》，欧内斯特 · 内格尔（Ernest Nagel），詹姆斯 · R. 纽曼（James R. Newman）著，刘新文译，中国轻工业出版社 (2021-03 出版)



Thanks for your attention!

Q & A