Proposition and Formulas

(命题和公式)

华南师范大学•通识课•逻辑与批判性思维

2022年秋季学期

高贝贝

13442201500@qq.com

哲学与社会发展学院

逻辑与分析哲学研究中心

http://logic.scnu.edu.cn

主要内容

1、复习回顾

2、命题公式

3、命题公式的真值判定

命题联结词符号

符号	名称	意义
$\neg$	并非	并非
$\vee$	析取	或者
$\wedge$	合取	并且
$\rightarrow$	蕴涵	如果，那么

- $\neg p$　　并非p（否定式）
- $p \wedge q$　　p并且q　（合取式）
- $p \vee q$　　p或者q　（析取式）
- $p \rightarrow q$　　如果p，那么q　（蕴涵式）
- $p \leftrightarrow q$　　当且仅当p，才q（等值式）

命题公式
（命题形式、真值形式）

命题形式（命题公式）：命题联结词和命题变元所构成的形式结构。

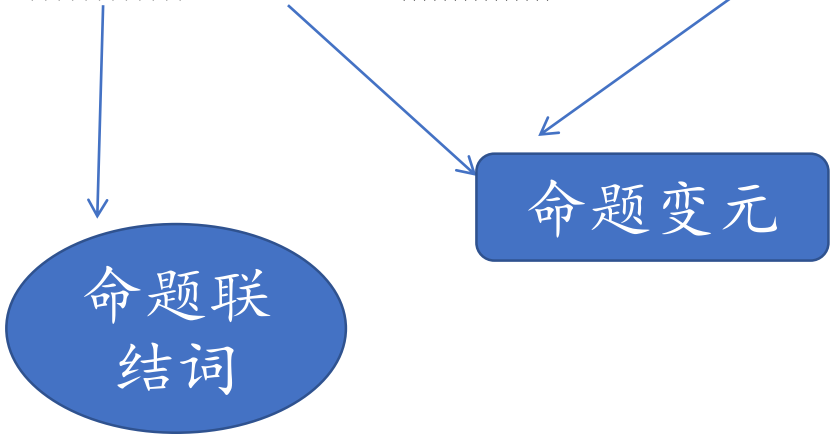
命题公式有两种成分：

1.代表具体内容的命题变元；

2.连接或组合命题变元的结构成分。（命题联结词）

例如：

如果下雨，那么地面就会湿。



$$p \to q$$

按照以下方式规定某个符号串是否是命题公式（简称为公式）。

(1) 所有命题变元都是公式。

(2) 如果A 是公式，那么$\neg$A 也是公式。

(3) 如果A 和B 是公式，那么(A$\vee$B)、(A $\wedge$ B)、(A$\rightarrow$B) 也都是。

(4) 只有通过以上规则得到的符号串才是公式。

根据公式的形成规则，我们可以判定任一符号串是不是公式。

例如

$$(\neg((p\wedge q)\leftrightarrow(r\vee s))\wedge p)\rightarrow(q\vee(r\leftrightarrow q))$$

$p, q, r, s, p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots\ldots$

$$\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \rightarrow \cdot)$$

$p, q, r, s, p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots\ldots$

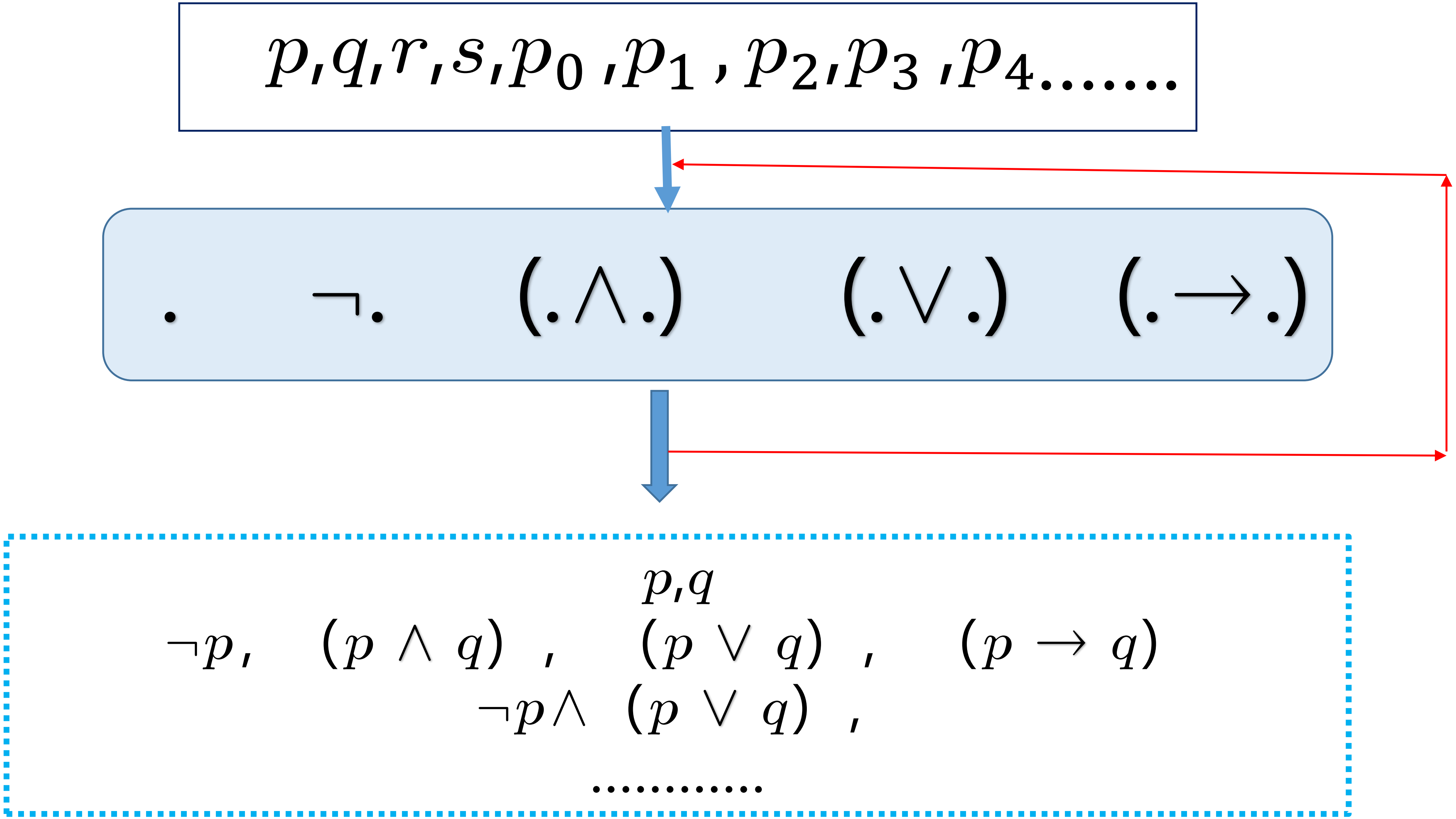
$\cdot \qquad \neg\cdot \qquad (\cdot \wedge \cdot) \qquad (\cdot \vee \cdot) \qquad (\cdot \rightarrow \cdot)$

p, q

$\neg p, \quad (p \wedge q), \quad (p \vee q), \quad (p \rightarrow q)$

$\neg p \wedge (p \vee q),$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$


$p, q, r, s, p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 \ldots\ldots$
$. \quad \neg. \quad (. \wedge .) \quad (. \vee .) \quad (. \rightarrow .)$
p, q
$\neg p, \quad (p \wedge q), \quad (p \vee q), \quad (p \rightarrow q)$
$\neg p \wedge (p \vee q),$
$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$((p \to q) \wedge (p \to \neg q)) \to \neg p$$

$$((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \wedge r)) \to (q \wedge s)$$

$$\neg(((p \to q) \wedge (r \to s) \wedge (p \wedge r)) \to (q \wedge s))$$

$$(p \to q) \to (((r \to s) \to p) \wedge (r \to q \wedge s))$$

……

……

命题公式的数目是无穷的。

主联结词决定命题公式的种类。

公式的主联结词：

在公式的形成过程中，最后一次使用到的联结词。

公式简化规则

(1)整个公式最外层的一对括号可省略；

(2)联结词¬、∧、∨、→、↔的组合力依序递减；

(3)→在公式中相邻的两处出现以最后一次的出现组合力更强。∧和∨的情况类似。

例子

$$p \rightarrow q \wedge r$$

根据∧的组合力大于→的，我们应当先计算∧，原公式所表达肯定不会是（$p \rightarrow q$）∧r，而必定是$p \rightarrow$（$q \wedge r$）。

例子

$$p \rightarrow q \rightarrow r \rightarrow s$$

根据规则（3），→的最后一次出现组合力最强，中间那次出现次之，最左边那次出现最弱，我们应当先计算最后一次出现。

$$(p \rightarrow (q \rightarrow (r \rightarrow s)))$$

命题公式的真值判定

命题公式的一个重要特征：真值函项性

在任何一个命题公式中，每一组命题变元的真值组合情况都决定着该命题公式本身的真假。

命题公式包含的命题变元和命题公式之间存在着函数关系，此类函数叫做“真值函数”

自变量：命题变元
定义域和值域都是真值集合：{真，假}

- **Δ 每一个命题公式都是一个真值函数。**

自变量为p和q的真值函数：

$f^{\wedge}$：$p \wedge q$

Δ. $f(\boldsymbol{p})$: $\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{p}$

Δ. $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q})$: $(\boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})) \rightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q})$

Δ. $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r})$: $(\boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}) \rightarrow (\boldsymbol{p} \rightarrow (\boldsymbol{q} \rightarrow \boldsymbol{r}))$

Δ. $f(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{r}, \boldsymbol{s})$: $(\boldsymbol{p} \rightarrow \boldsymbol{q}) \rightarrow ((\boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{s}) \rightarrow \boldsymbol{p} \wedge \boldsymbol{r} \rightarrow \boldsymbol{q} \wedge \boldsymbol{s})$

真值函数的取值数目由公式中变元的真假组合决定的：

p	$f(p)$
T	
F	

2

p	q	$f(p,q)$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

4

真值函数的取值数目由公式中变元的真假组合决定的：

p	q	r	$f(p,q,r)$
T	T	T	
T	T	F	
T	F	T	
T	F	F	
F	T	T	
F	T	F	
F	F	T	
F	F	F	

8

p	q	r	s	$f(p,q,r,s)$
T	T	T	T	
T	T	T	F	
T	T	F	T	
T	T	F	F	
T	F	T	T	
T	F	T	F	
T	F	F	T	
T	F	F	F	
F	T	T	T	
F	T	T	F	
F	T	F	T	
F	T	F	F	
F	F	T	T	
F	F	T	F	
F	F	F	T	
F	F	F	F	

16

当一个公式有n个变项时，其真值组合有2^n种。

命题公式的真值取决于两个要素：

- 一是命题变元的真值；
- 二是命题联结词的意义。

◆命题变元本身没有真值，但它的代入实例有真值，要么为真，要么为假。在这个意义上，命题变元也就获得了两个派生的真值：真和假。

◆但是，这两个真值不是来自与现实的比较和对照，而是由我们直接给予或任意指定的，所以，称为“真值指派”。

并非¬

A	¬A
T	
F	

A	¬A
T	F
F	T

“并非A”为真，当且仅当“A”为假。

合取∧

A	B	A ∧ B

A	B	$A \wedge B$
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

A	B	$A \wedge B$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

A	B	A ∧ B
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

∂. 联言支全真，则联言命题为真。

ß. 只要有一个联言支为假，则联言命题为假。

析取∨

A	B	A ∨ B
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

A	B	A ∨ B
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

ɑ. 至少有一个选言支为真，则选言命题为真。

ß. 相容选言命题为假，则全部选言支为假。

蕴涵 $\rightarrow$

A	B	$A \rightarrow B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

A	B	$A \to B$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

前真后假，蕴涵式为假

真值表

- 真值表：就是能显示一个真值形式在它的命题变元的各种真值组合下所取真值的图表。
- 运用真值表，可以判定任一公式是否为重言式、矛盾式和可满足式，也可以判定公式是否为等值的、或者矛盾的，还可以判定推理是否有效。

- 一个公式，如果不论其中命题变元的取值如何，此公式取值都为真，那么此公式就是**重言式**，又称为**恒真式**。
- 一个公式，如果不论其中命题变元的取值如何，此公式取值都为假，那么此公式就是**矛盾式**，又称为**恒假式**。
- 一个公式，如果存在一种命题变元的取值情况，使得此公式取值为真，那么此公式就是**可满足式**。

真值函项按取值情况的分类	相对应的真值形式（命题公式）的分类	例子
常真的 （无论其中命题变项如何取值）	恒真式（重言式）	$p \vee \neg p$，$\neg p(p \wedge \neg p)$等
常假的 （无论其中命题变项如何取值）	恒假式（矛盾式）	$p \wedge \neg p$ 等
可满足的 （命题变项取值不同，真值函项时真时假）	可满足式	$p \vee q$，$p \rightarrow q$ 等

推理有效性

- **推理**：就是从已有的命题得出新的命题的过程或方法。一般把已有的命题称为推理的前提，把得到的新命题称为推理的结论。
- 一个推理由前提和结论两部分组成。如果一个推理形式是有效的，那么由真的前提必定得到真结论。
- **前提和结论之间是蕴涵关系。**
- 推理形式是*有效的*当且仅当相应的蕴含式是*重言式*。

定义

设一个推理的形式如下：

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

又设这个形式中出现的命题变元只有 $p_1, p_2, \ldots, p_m$。如果在这些命题变元的所有取值情况中，不存在情况使得推理形式的前提都为真而结论为假，那么就称这个推理形式是（演绎）**有效的**。也可称 A_1、A_2、…、A_n **有效地推出** B。

定义

无前提的推理形式：

$$\frac{\qquad}{B}$$

如果是有效的，就称公式 B 是**有效的**。此时，B 在其中命题变元的任意取值情况下都为真，因此，又把 B 称为 B 是**重言的**（tautology）、恒真的。

真值表判定法

例子：判定公式“$((p \to q) \land p) \to q$”是否为重言式

1. 识别公式中所有不同的命题变元，以确定所需要的行数，并竖行里出他们之间所有可能的真假组合。

p	q	
T	T	
T	F	
F	T	
F	F	

当一个公式有n个变项时，其真值组合有2^n种。

例子：判定公式“$((p \to q) \wedge p) \to q$”是否为重言式

2. 按照该公式的生成次序，由简到繁横向列出该公式的所有子公式，直至该公式本身。

p	q	$(p \to q)$	$(p \to q) \wedge p$	$((p \to q) \wedge p) \to q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

例子：判定公式“$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$”是否为重言式

3. 按照上面给定的真值联结词的真值表，由命题变元的真值逐步计算出各个子公式的真值，最后算出该公式本身的真值

p	q	$(p \rightarrow q)$	$(p \rightarrow q) \wedge p$	$((p \rightarrow q) \wedge p) \rightarrow q$
T	T			
T	F			
F	T			
F	F			

3. 按照上面给定的真值联结词的真值表，由命题变元的真值逐步计算出各个子公式的真值，最后算出该公式本身的真值

p	q	$(p \to q)$	$(p \to q) \land p$	$((p \to q) \land p) \to q$
T	T	T	T	T
T	F	F	F	T
F	T	T	F	T
F	F	T	F	T

∴由真值表可知，原公式为重言式

如果姚明是诗人，那么他是文学家。姚明不是诗人，所以，他不是文学家

解：

p：姚明是诗人

q：姚明是文学家

$$(p \rightarrow q) \wedge \neg p \rightarrow \neg q$$

例子：用真值表法判定“（$p \to q$）$\wedge \neg p \to \neg q$”是否是重言式

p	q	$p \to q$	$\neg p$	$\neg q$	$((p \to q) \wedge \neg p$	$((p \to q) \wedge \neg p) \to \neg q$
T	T	T	F	F	F	T
T	F	F	F	T	F	T
F	T	T	T	F	T	F
F	F	T	T	T	T	T

$\therefore$ 由真值表可知，原公式为不是重言式，相应的推理无效。

真值表方法小结：

1. 用符号表达出命题形式。

2. 列出命题形式中的命题变元。

3. 根据括号和联结词的确定命题形式内部的次序。

4. 画出真值表。

5. 依照确定的表达式次序检验真值。

6. 根据最后一步的真值情况作出判定。

   6.1如果最后一栏都为真，则该命题为重言式，相应的推理有效。

   6.2如果最后一栏都为假，则该命题为矛盾式，相应的推理无效。

   6.3如果最后一栏有真有假，则该命题不是重言式，相应的推理无效。

解析树判定法

- 基本思路：
- 如果公式A是一个重言式，那么无论给A中的变项赋予何种真值指派，A必定且只能取值为真。
- 因此，若假设A不是重言式，即可以为假，然后根据真值联结词的规则，逐步逆推出其中各个子公式的真值，直至推出命题变项的真值，看子公式或命题变项是否会出现赋值矛盾（既真又假）。
- 若从一个假设推出矛盾，因此假设不成立，原公式不可能为假，恒为真，是重言式。

➢思想：为判断推理形式

$$\frac{A_1;A_2;\ \cdots\cdots..;A_n}{B}$$

是否有效，试图去寻找相关命题变元的一种取值情况，使得前提A_1，A_2，…，A_n都为真，而结论B 为假。

➢过程：假设前提A_1，A_2，…，A_n 都为真而结论B 为假，由此反推相关命题变元的取值情况。

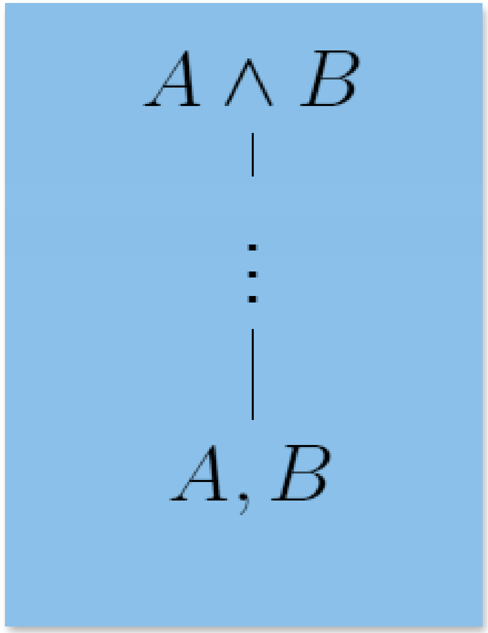
➢约定：在解析树中，写出一个公式就表示这个公式为真，反之为表示一个公式为假，就写出这个公式的否定。

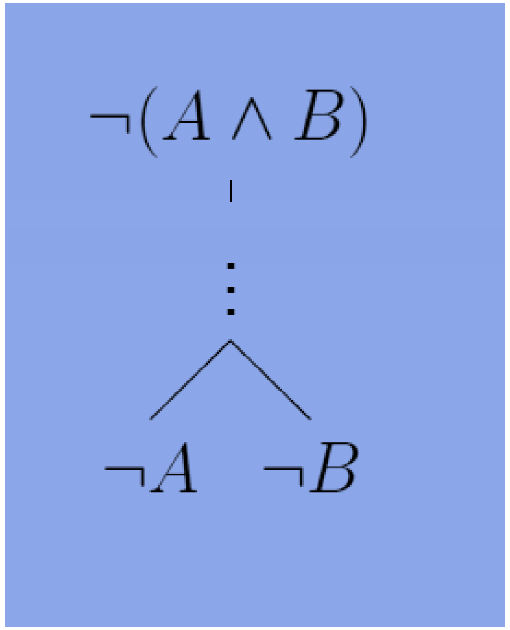
解析树的构造规则

¬¬规则：

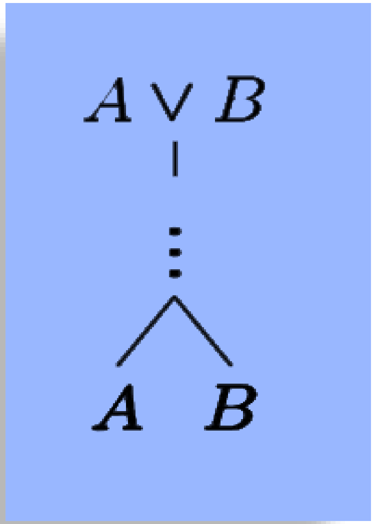
$$\begin{array}{c} \neg\neg A \\ | \\ \vdots \\ | \\ A \end{array}$$

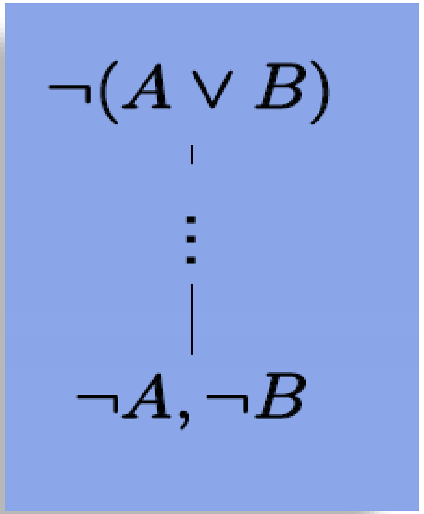
- ∧规则：



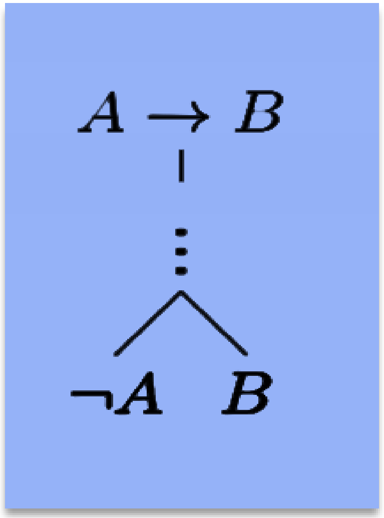


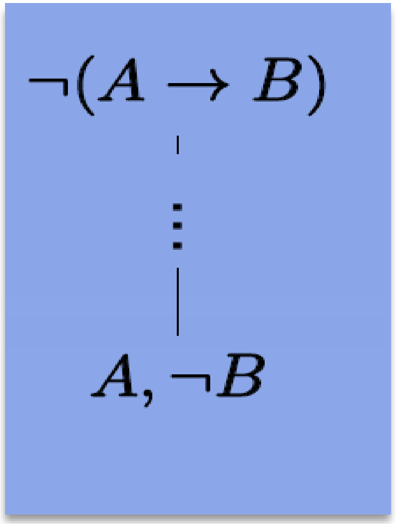
- ∨规则：



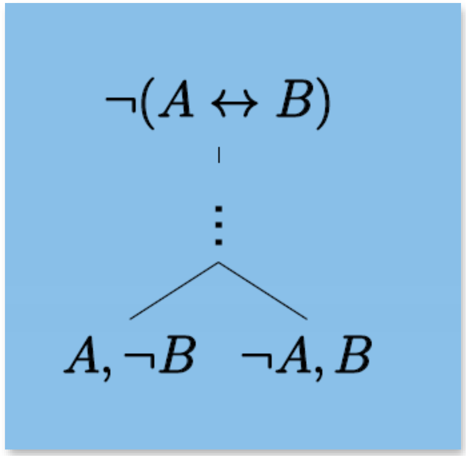


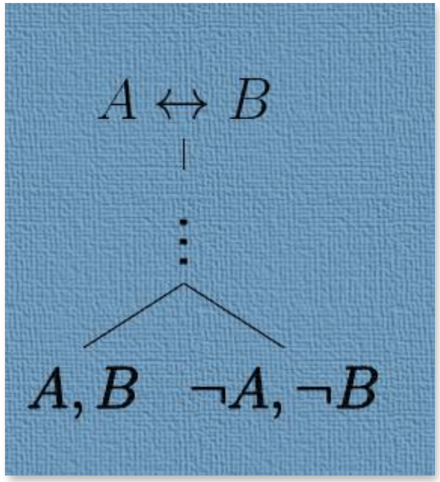
- →规则：





- $\leftrightarrow$规则：





例子，判定公式（$p_1 \vee p_2$）$\rightarrow$（$p_1 \rightarrow p_2$）是否是重言式?

- 第一步：写下原公式的否定，这表示假定原公式为假。
- $\neg$（（$p_1 \vee p_2$）$\rightarrow$（$p_1 \rightarrow p_2$））

- 第二步：在这个公式下边写出公式$p_1 \vee p_2$和$\neg(p_1 \to p_2)$，并用一条竖线连接原公式的否定与这个两个公式（两个公式间用逗号分开）。这相当于从原公式为假得到$p_1 \vee p_2$为真，$p_1 \to p_2$为假。这一步可以称为对原公式的否定进行了**一次解析**。

$$
\begin{array}{c}
\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2)) \\
| \\
p_1 \vee p_2,\ \neg(p_1 \to p_2)
\end{array}
$$

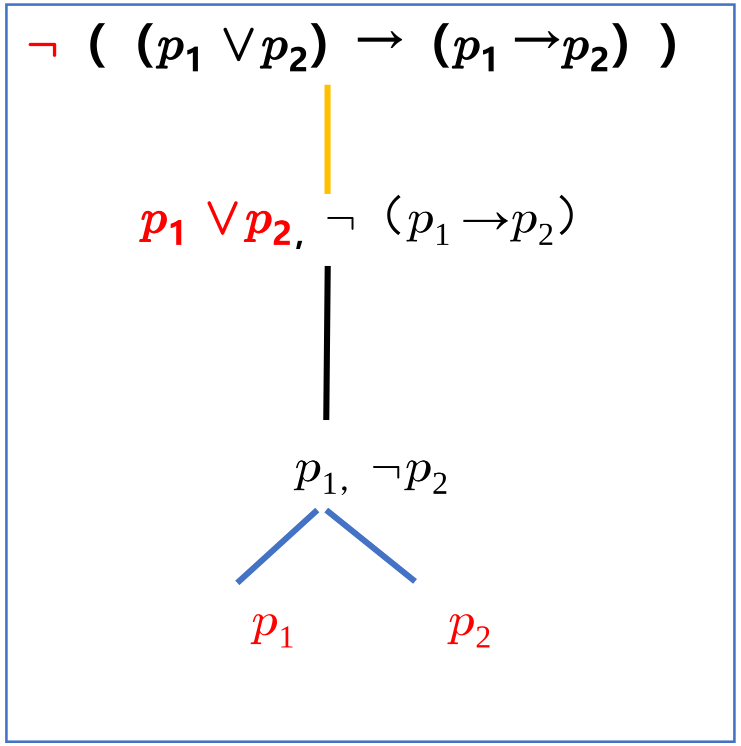
- 第三步，在第二步得到的公式下面写出公式p_1 和$\neg p_2$，仍用用一条竖线连接第二步的公式与这两个公式。这一步的道理与第二步相同。这一步对 $\neg(p_1 \to p_2)$ 进行了一次解析。

$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$p_1 \vee p_2,\ \neg(p_1 \to p_2)$$

$$p_1,\ \neg p_2$$

- 最后一步，在第三步得到的公式下方分出两个叉，在每个叉的下方分别写出公式p_1、p_2。这一步出现分叉，这实际相当于由$p_1 \vee p_2$为真得到两种可能性：p_1 为真，或p_2 为真。这一步对$p_1 \vee p_2$ 进行了一次解析。



一些术语

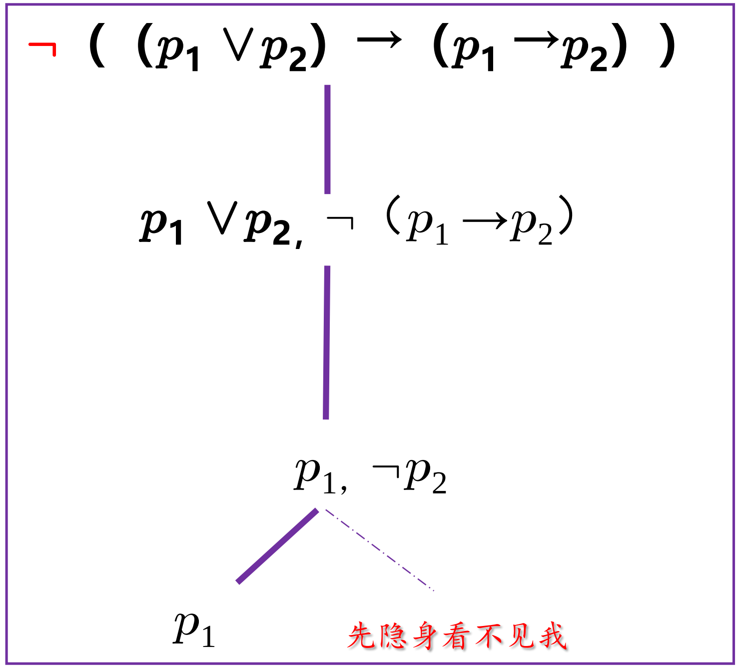
$$\neg((p_1 \vee p_2) \to (p_1 \to p_2))$$

$$p_1 \vee p_2,\ \neg(p_1 \to p_2)$$

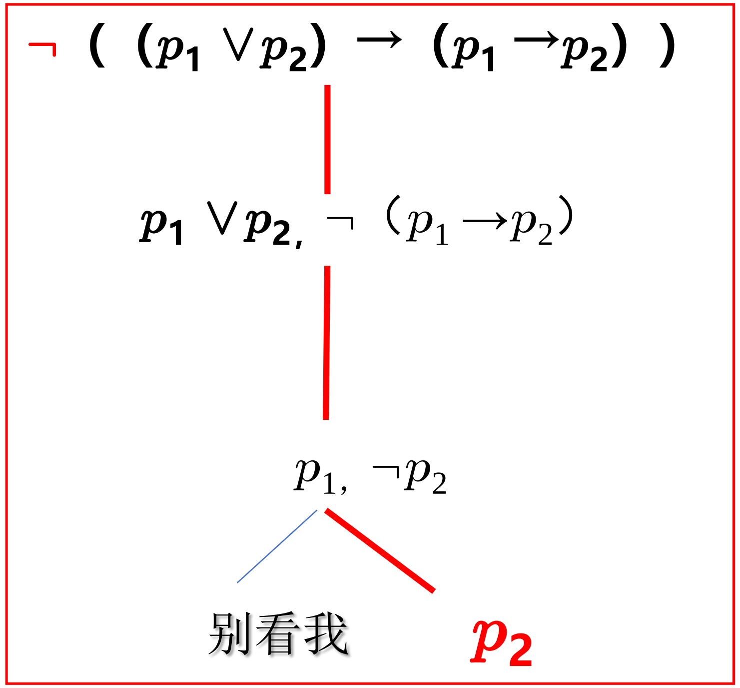
$$p_1,\ \neg p_2$$

$$p_1 \qquad\qquad p_2$$

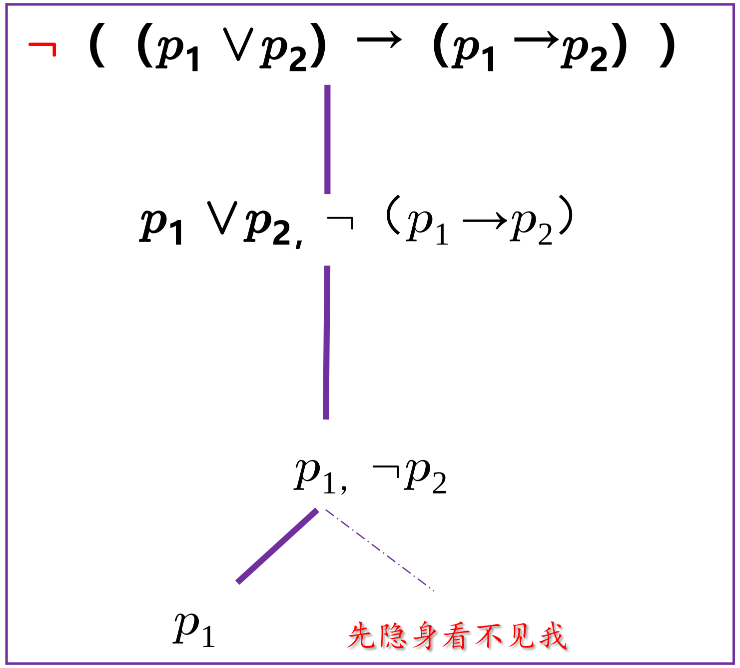
- 这是一个树形图，简称树（倒着的！）。
- 最上面的公式称为根，
- 最下面的公式称为叶。
- 从根到某个叶所经历的所有公式称为一个枝。



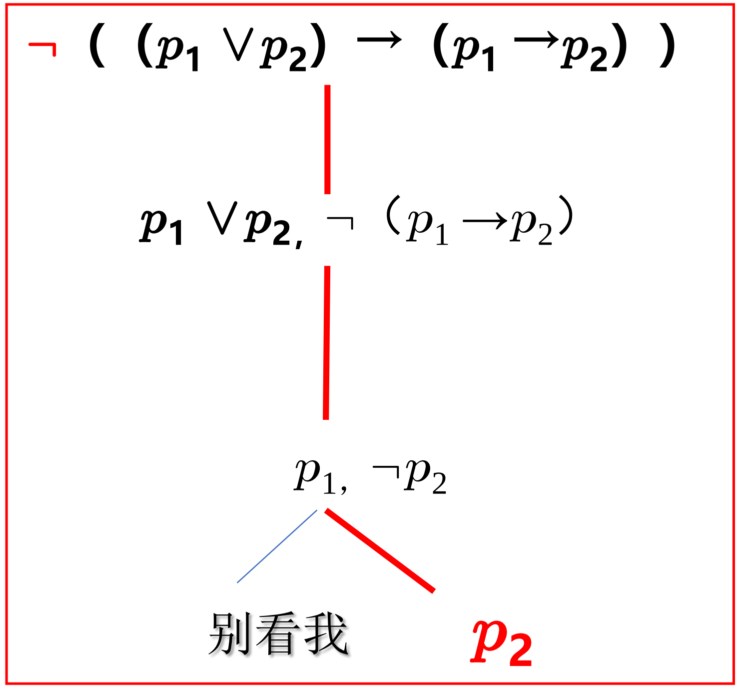
- 这个树有两个枝。
- 第一个枝：
- $\neg((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$；
- $p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \rightarrow p_2)$；
- $p_1, \neg p_2$
- p_1



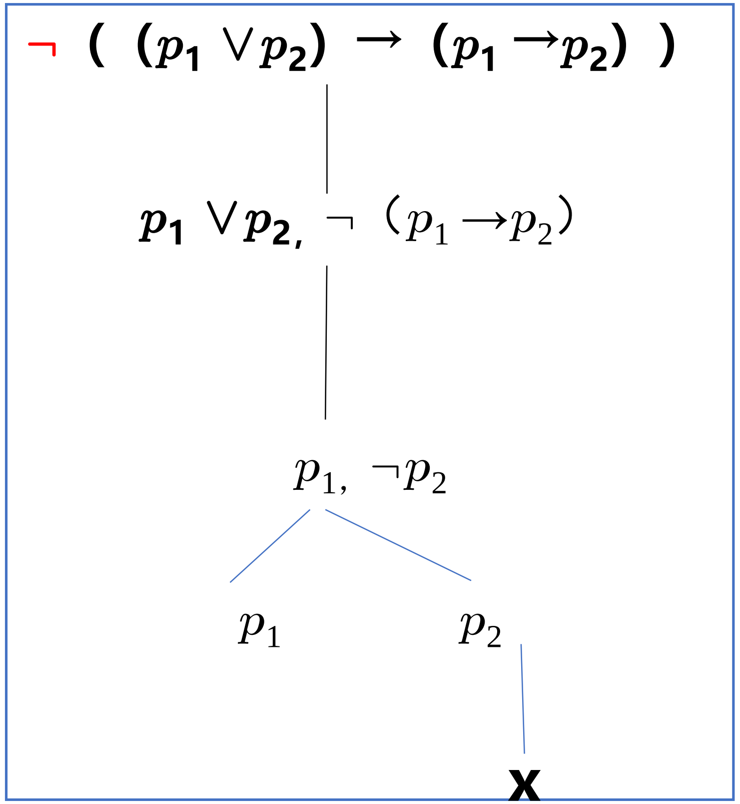
- 这个树有两个枝。
- 第二个枝：
- $\neg((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$；
- $p_1 \vee p_2$, $\neg(p_1 \rightarrow p_2)$；
- p_1, $\neg p_2$
- p_2



- 这个树有两个枝。
- 第一个枝：
- $\neg((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$；
- $p_1 \vee p_2$, $\neg(p_1 \rightarrow p_2)$；
- p_1, $\neg p_2$
- p_1
- 这表示要使原公式为假，要求：p_1 为真，p_2 为假



- 这个树有两个枝。
- 第二个枝：
- $\neg((p_1 \vee p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_2))$；
- $p_1 \vee p_2, \neg(p_1 \rightarrow p_2)$；
- $p_1, \neg p_2$
- p_2
- 这表示要使原公式为假，要求：p_1为真，p_2为假且为真，
- 这一要求是不可能实现的。



- 综上所述，要使原公式为假，必须使得p_1为真，p_2 为假。
- 由解析树不难判断在p_1为真，p_2 为假时，原公式为假。由此可判断原公式不是重言式。

- 对于公式A，建立¬A 的解析树，使得解析树中的公式除命题变元及其否定之外都被解析了一次（这样的解析树称为是饱和的）。
- 如果该解析树中的每个枝都含有某个变元及其否定（闭枝），那么A是重言式；
- 否则，A 不是重言式。

用解析树判定以下公式是否为重言式。

1.$\neg(\boldsymbol{p}\wedge\boldsymbol{q}) \leftrightarrow \neg\boldsymbol{p}\vee\neg\boldsymbol{q}$

2. $(\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{q})\wedge(\boldsymbol{r} \to \boldsymbol{s}) \to ((\boldsymbol{p}\vee\boldsymbol{r}) \to (\boldsymbol{q}\vee\boldsymbol{s}))$

凭栏人·寄征衣

姚燧

欲寄君衣君不还，
不寄君衣君又寒。
寄与不寄间，
妾身千万难。

解答：

想要给你寄冬衣，又怕你不再把家还；不给你寄冬衣，又怕你过冬挨冻受寒。是寄还是不寄，我拿不定主意，真是感到千难又万难。

p：寄冬衣

q：君还

r：君寒

$$(p \to \neg q)\quad(\neg p \to r) \wedge (p \vee \neg p) \to (\neg q \vee r)$$

Thanks for your attention!

Q & A