

逻辑门及其应用

Ming Hsiung

mingshone@163.com

School of Philosophy and Social Development
South China Normal University

主要内容

- 1 逻辑门
- 2 线路图设计案例
 - 案例 1：更复杂的灯控制
 - 案例 2：控制红绿灯
- 3 加法器
- 4 附：一道习题的解答

主要内容

- 1 逻辑门
- 2 线路图设计案例
 - 案例 1：更复杂的灯控制
 - 案例 2：控制红绿灯
- 3 加法器
- 4 附：一道习题的解答

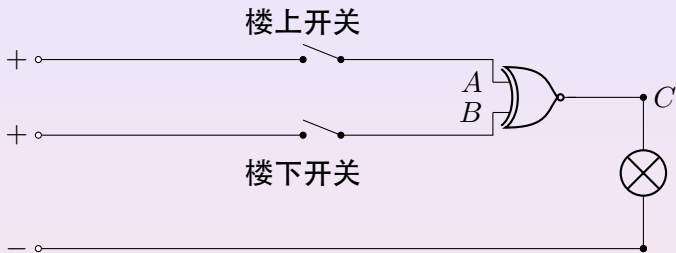
一个开关设计问题

如何用两个开关各自独立地控制一盏灯（即改变任何一个开关的状态，都会改变灯的状态），画出线路图。

使用单刀双掷开关



使用异或门



- A、B 端都断开电流时，C 端无电流
- A 端接通电流，而 B 端断开电流时，C 端有电流
- A 端断开电流，而 B 端接通电流时，C 端有电流
- A、B 端都接通电流时，C 端无电流

异或门及其功能

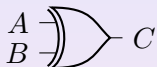


异或门

| A | B | C |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

逻辑门 (Logic Gates) 是在集成电路 (Integrated Circuit) 上的基本组件。简单的逻辑门可由晶体管组成。这些晶体管的组合可以使代表两种信号的高低电平在通过它们之后产生高电平或者低电平的信号。高、低电平可以分别代表逻辑上的“真”与“假”或二进制当中的 1 和 0，从而实现逻辑运算。(引自 <https://baike.baidu.com/item/逻辑门>)

异或门及其功能

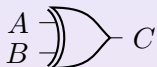


异或门

| A | B | C |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

逻辑门 (Logic Gates) 是在集成电路 (Integrated Circuit) 上的基本组件。简单的逻辑门可由晶体管组成。这些晶体管的组合可以使代表两种信号的高低电平在通过它们之后产生高电平或者低电平的信号。高、低电平可以分别代表逻辑上的“真”与“假”或二进制当中的 1 和 0，从而实现逻辑运算。(引自 <https://baike.baidu.com/item/逻辑门>)

异或门及其功能



异或门

| A | B | C |
|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

逻辑门 (Logic Gates) 是在集成电路 (Integrated Circuit) 上的基本组件。简单的逻辑门可由晶体管组成。这些晶体管的组合可以使代表两种信号的高低电平在通过它们之后产生高电平或者低电平的信号。高、低电平可以分别代表逻辑上的“真”与“假”或二进制当中的 1 和 0，从而实现逻辑运算。(引自

<https://baike.baidu.com/item/逻辑门>)

异或门及其功能



异或门

| A | B | C |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

逻辑门 (Logic Gates) 是在集成电路 (Integrated Circuit) 上的基本组件。简单的逻辑门可由晶体管组成。这些晶体管的组合可以使代表两种信号的高低电平在通过它们之后产生高电平或者低电平的信号。高、低电平可以分别代表逻辑上的“真”与“假”或二进制当中的 1 和 0，从而实现逻辑运算。(引自 <https://baike.baidu.com/item/逻辑门>)

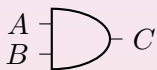
回忆

| A | B | $\neg A$ | $A \vee B$ | $A \wedge B$ | $A \leftrightarrow B$ | $A \leftrightarrow B$ |
|-----|-----|----------|------------|--------------|-----------------------|-----------------------|
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | | 0 | 0 | 1 | 0 |

说明：1 = T, 0 = F

基本的逻辑门

| A | B | C |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |



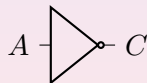
与门

| A | B | C |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |



或门

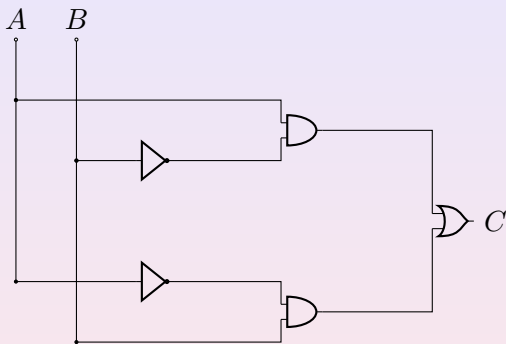
| A | C |
|-----|-----|
| 1 | 0 |
| 0 | 1 |



非门

异或门的等效组合

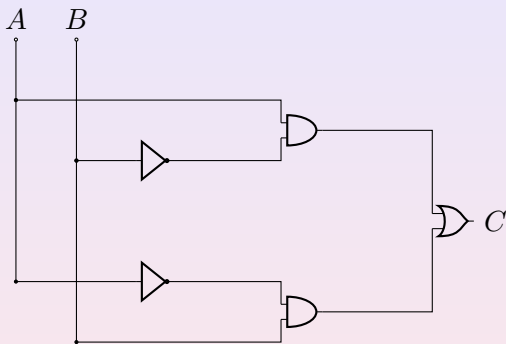
| A | B | C |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |



$$C = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

异或门的等效组合

| A | B | C |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |



$$C = (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$$

示例

- 求一公式 A ，使其真值表为：

| p | q | A |
|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

示例解答

| p | q | A |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | A_1 |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | A_2 |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | A |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

$$A \iff A_1 \vee A_2$$

| p | q | A_1 |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | A_2 |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

| p | q | A |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

$$A \iff A_1 \vee A_2$$

| p | q | A_1 |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

$$A_1 \iff p \wedge \neg q$$

| p | q | A_2 |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

$$A_2 \iff \dots$$

| p | q | A |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

$$A \iff A_1 \vee A_2$$

| p | q | A_1 |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 |

$$A_1 \iff p \wedge \neg q$$

| p | q | A_2 |
|-----|-----|----------|
| 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 |

$$A_2 \iff \neg p \wedge q$$

Quiz

- 求一公式 A ，使其真值表为：

| p | q | r | A |
|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |

视频资料

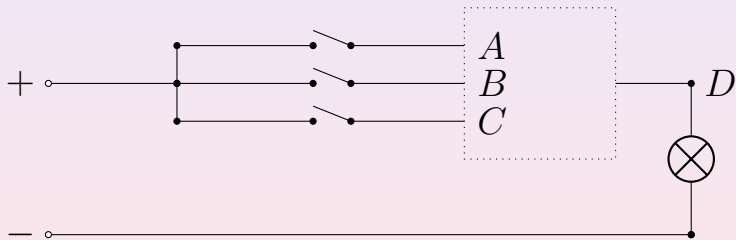
- 点击：[超形象分析计算机晶体管的工作原理](#)

主要内容

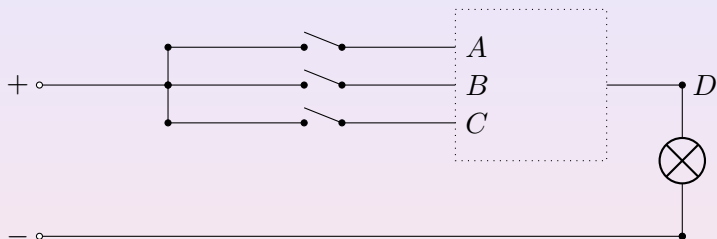
- 1 逻辑门
- 2 线路图设计案例
 - 案例 1：更复杂的灯控制
 - 案例 2：控制红绿灯
- 3 加法器
- 4 附：一道习题的解答

问题

用逻辑门来设计线路，使得三个开关可独立地控制一盏灯



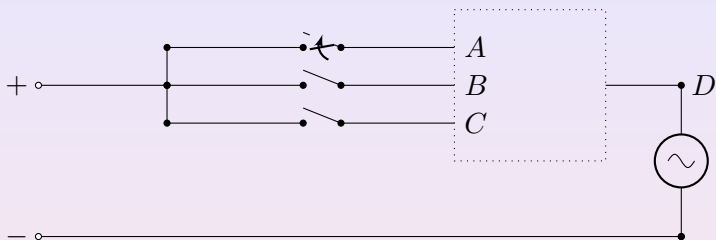
解答



在正常情况下，在三个单刀开关都是断开状态时，灯不亮。

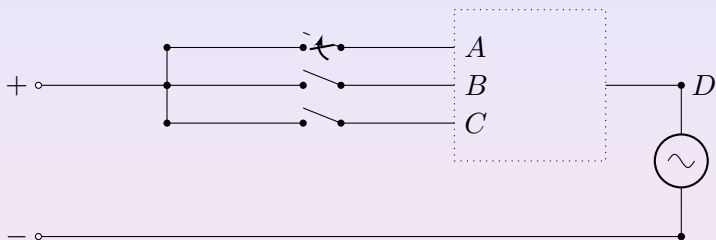
所以，

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 0 时，输出 D 应为 0。



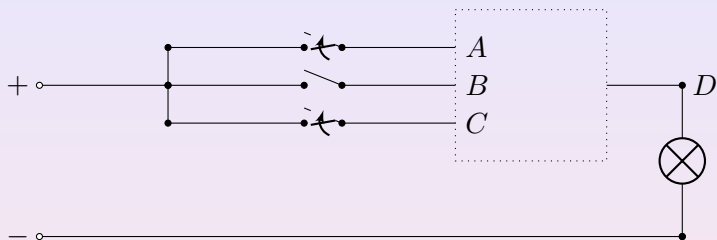
改变任何一个单刀开关的状态（即使得三个单刀开关之一接通）都会使灯亮，所以，

- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 1。



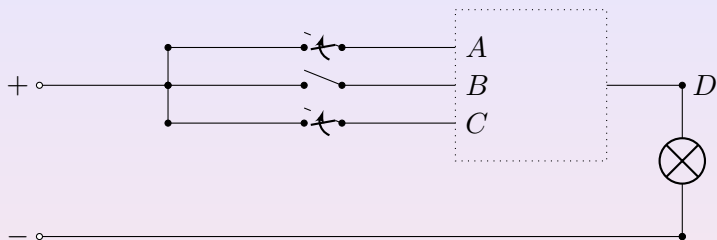
改变任何一个单刀开关的状态（即使得三个单刀开关之一接通）都会使灯亮，所以，

- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 1。



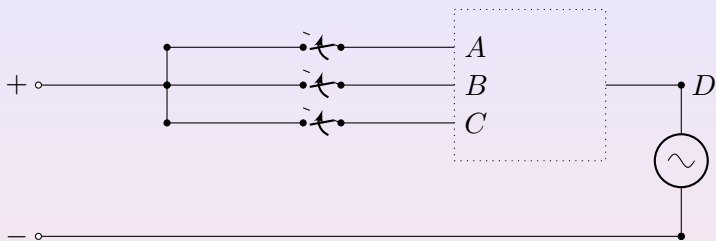
如果再接通三个单刀开关中先前没有的接通的一个，灯的状态又会发生改变，变为熄灭状态，即

- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 0。



如果再接通三个单刀开关中先前没有的接通的一个，灯的状态又会发生改变，变为熄灭状态，即

- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 0。



最后，当把三个单刀开关都接通，灯再一次被点亮，亦即

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 1 时，输出 D 应为 1。

上面的结果画在下面的表格中：

| A | B | C | D |
|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

由此，可以得到，

$$D = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)。$$

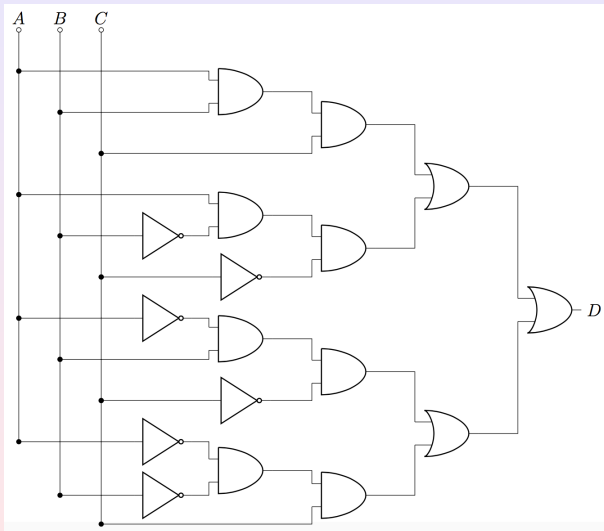
上面的结果画在下面的表格中：

| A | B | C | D |
|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

由此，可以得到，

$$D = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge \neg B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge B \wedge \neg C) \vee (\neg A \wedge \neg B \wedge C)。$$

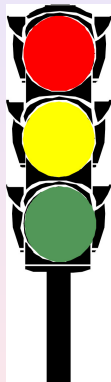
由此，不难画出所需的逻辑门组合，如下图所示：



从真值表到公式的转换程序

- 点击：[从真值表到公式的转换程序](#)

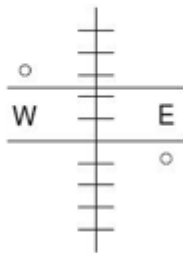
如何控制红绿灯



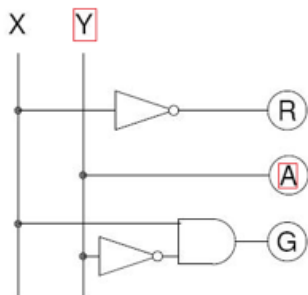
- 红: Red, 黄: Amber, 绿: Green
- 闪烁顺序: 红, 红/黄, 绿, 黄, 红,

Level Crossing

| Inputs | | Lights | | |
|--------|---|--------|---|---|
| X | Y | R | A | G |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |



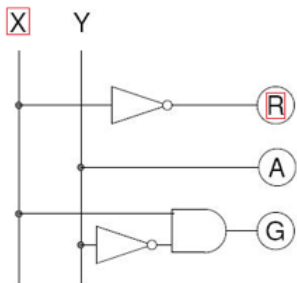
$$A = Y$$



Level Crossing

| Inputs | | Lights | | |
|--------|---|--------|---|---|
| X | Y | R | A | G |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

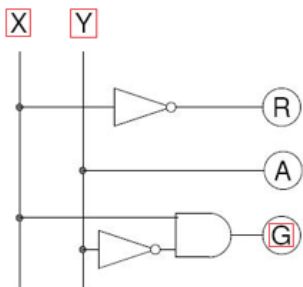
$$R = \bar{X}$$



Level Crossing

| Inputs | | Lights | | |
|--------|---|--------|---|---|
| X | Y | R | A | G |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$$G = X \text{ AND } \bar{Y}$$



Level Crossing

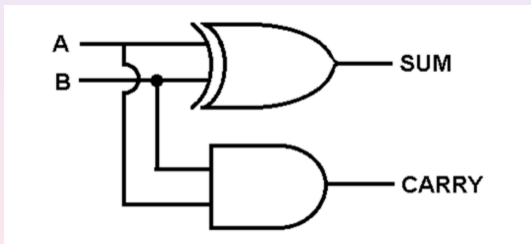
| Inputs | | Lights | |
|--------|---|--------|---|
| X | Y | R | G |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 |

主要内容

- 1 逻辑门
- 2 线路图设计案例
 - 案例 1：更复杂的灯控制
 - 案例 2：控制红绿灯
- 3 加法器
- 4 附：一道习题的解答

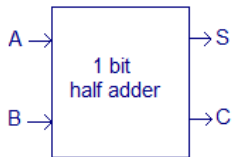
半加法器 (half adder)

- 一位二进制数的加法基本规则可用半加法器来“封装”。
- 半加法器是如下的逻辑门组合：

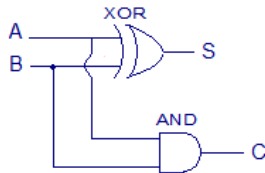


| Inputs | | Outputs | |
|--------|---|---------|---|
| A | B | S | C |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |

Truth table



Schematic

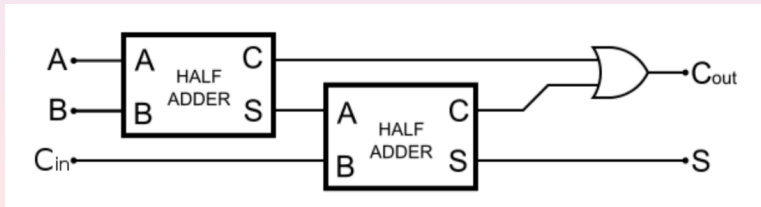


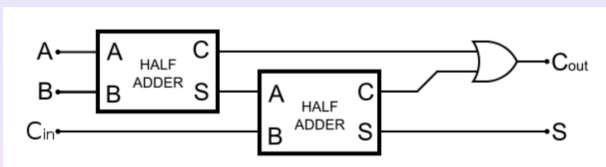
Realization

半加法器演示：点击 [Half Adder in Wiki](#)

全加法器 (full adder)

- 全加法器将两个一位二进制数相加，并根据接收到的低位进位信号，输出和、进位输出。全加器的三个输入信号为两个加数 A 、 B 和低位进位 C_{in} 。全加器的输出和半加器类似，包括向高位的进位信号 C_{out} 和本位的和信号 S 。
- 全加法器也是逻辑门组合，但可以用已经封装好的组合来进行再组合即可：

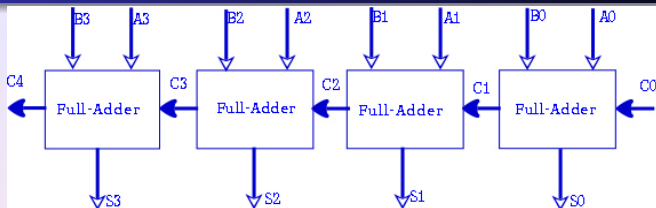




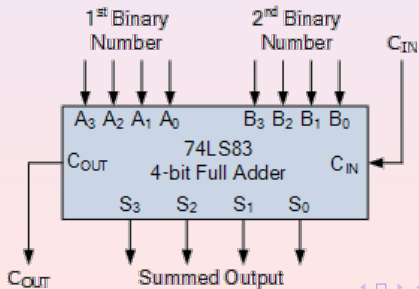
| A | B | Carry In | Sum | Carry out |
|---|---|----------|-----|-----------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |

全加法器演示：点
击 [Full Adder in Wiki](#)

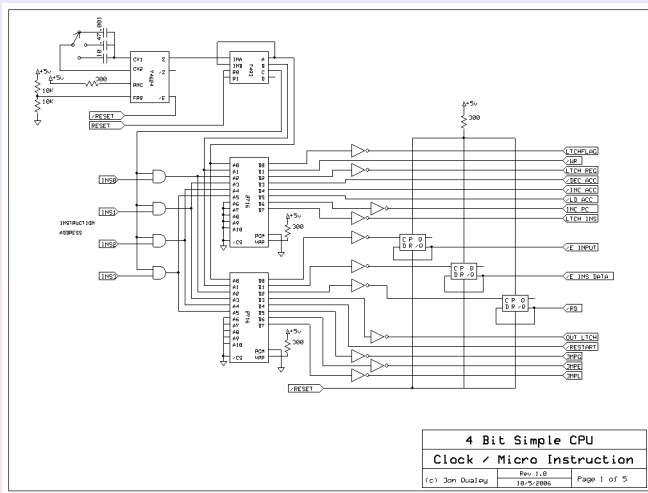
4 位二进制数的加法器



进一步封装



4 位二进制数的一个 CPU



Intel CPU



结语

不管你的双手多么灵活，你也只能每秒开关电灯三四次，可是晶体管可以每秒开关上百万次。……如果你把“是”定义为打开，把“否”定义为关闭或者把“否”定义为打开，把“是”定义为关闭，如果你的“是”或“否”讲得足够快，并且逻辑处理巧妙，那么你就能够设计出“智能”机器。

Excerpt From: 佩珀·怀特 (Peregrine White, Jr.)

《在 MIT 上学》(The idea factory: learning to Think at MIT)

课后任务

- 根据本节课所讲的从真值表转化为公式的方法，自学第 8 章第 3 节内容。
- 进入网页 <http://www.32x8.com/var3.html>，进行自我测试（先制定真值表，然后给出自己的答案，再使用网页上的程序来进行检验）。
- (optional) 完成教材上习题 8.1.1、8.1.2、8.1.3、8.3.1、8.3.2、8.3.3。

视频资料

- 点击：[计算机晶体管巧妙实现全加器](#)

Thanks for your attention!

Q & A

主要内容

- 1 逻辑门
- 2 线路图设计案例
 - 案例 1：更复杂的灯控制
 - 案例 2：控制红绿灯
- 3 加法器
- 4 附：一道习题的解答

问题（习题 9.2.1）

某公司要求设计如下的保险柜：该保险柜有三把钥匙，分别由经理、会计和出纳三人掌握，他们中任何一人都无法用自己的钥匙打开保险柜，必须至少两个人的钥匙才能打开保险柜。请使用逻辑门设计保险柜的线路。

解答

用 A 、 B 、 C 分别表示经理、会计和出纳的钥匙状态（1 表示钥匙入锁，0 表示钥匙不入锁），则根据保险柜开锁的要求，可确定 A 、 B 、 C 的输入与输出 D 关系如下：

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 0 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 1。
- 当输入 A 、 B 、 C 都为 1 时，输出 D 应为 1。

解答

用 A 、 B 、 C 分别表示经理、会计和出纳的钥匙状态（1 表示钥匙入锁，0 表示钥匙不入锁），则根据保险柜开锁的要求，可确定 A 、 B 、 C 的输入与输出 D 关系如下：

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 0 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 1。
- 当输入 A 、 B 、 C 都为 1 时，输出 D 应为 1。

解答

用 A 、 B 、 C 分别表示经理、会计和出纳的钥匙状态（1 表示钥匙入锁，0 表示钥匙不入锁），则根据保险柜开锁的要求，可确定 A 、 B 、 C 的输入与输出 D 关系如下：

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 0 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 1。
- 当输入 A 、 B 、 C 都为 1 时，输出 D 应为 1。

解答

用 A 、 B 、 C 分别表示经理、会计和出纳的钥匙状态（1 表示钥匙入锁，0 表示钥匙不入锁），则根据保险柜开锁的要求，可确定 A 、 B 、 C 的输入与输出 D 关系如下：

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 0 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 1。
- 当输入 A 、 B 、 C 都为 1 时，输出 D 应为 1。

解答

用 A 、 B 、 C 分别表示经理、会计和出纳的钥匙状态（1 表示钥匙入锁，0 表示钥匙不入锁），则根据保险柜开锁的要求，可确定 A 、 B 、 C 的输入与输出 D 关系如下：

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 0 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 1。
- 当输入 A 、 B 、 C 都为 1 时，输出 D 应为 1。

解答

用 A 、 B 、 C 分别表示经理、会计和出纳的钥匙状态（1 表示钥匙入锁，0 表示钥匙不入锁），则根据保险柜开锁的要求，可确定 A 、 B 、 C 的输入与输出 D 关系如下：

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 0 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 1。
- 当输入 A 、 B 、 C 都为 1 时，输出 D 应为 1。

解答

用 A 、 B 、 C 分别表示经理、会计和出纳的钥匙状态（1 表示钥匙入锁，0 表示钥匙不入锁），则根据保险柜开锁的要求，可确定 A 、 B 、 C 的输入与输出 D 关系如下：

- 当输入 A 、 B 、 C 都为 0 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有一个为 1 时，输出 D 应为 0。
- 当输入 A 、 B 、 C 有且仅有两个为 1 时，输出 D 应为 1。
- 当输入 A 、 B 、 C 都为 1 时，输出 D 应为 1。

上面的结果画在下面的表格中：

| A | B | C | D |
|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

可以计算出，

$$D = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)。$$

上面的结果画在下面的表格中：

| A | B | C | D |
|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

可以计算出，

$$D = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)。$$

上面的结果画在下面的表格中：

| A | B | C | D |
|-----|-----|-----|-----|
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |

可以计算出，

$$D = (A \wedge B \wedge C) \vee (A \wedge B \wedge \neg C) \vee (A \wedge \neg B \wedge C) \vee (\neg A \wedge B \wedge C)。$$

由此，不难画出所需的逻辑门组合，如下图所示：

