一阶逻辑的解析树

高贝贝

1344220150@qq. com

哲学与社会发展学院

逻辑与分析哲学研究中心

http://logic.scnu.edu.cn

主要内容

1 复习回顾

2 模型与赋值

3 有效性判定

A、E、I、O四种直言命题的一阶逻辑表达形式

A：所有S都是P

$$\forall x(S(x) \to P(x))$$

E：所有S都不是P

$$\forall x(S(x) \to \neg P(x))$$

I：有S是P

$$\exists x(S(x) \wedge P(x))$$

O：有S不是P

$$\exists x(S(x) \wedge \neg P(x))$$

1.牛郎爱织女，并且织女爱牛郎。

2.每个人都爱织女。

3.有某个人被每个人所爱。

4.牛郎不爱那些爱织女的男人。

5.织女爱每一个爱牛郎的人。

根据命题中出现的谓词和个体词，
我们取一阶语言（P，L^2，a，b）
P是一元谓词，表示“…..是人”
M是一元谓词，表示“…….是男人”
L是二元谓词，表示“……爱…….”
a 和 b 是个体常元，分别表示
“牛郎”和“织女”

1. 牛郎爱织女，并且织女爱牛郎。

$$L(a, b) \wedge L(b, a)$$

2. 每个人都爱织女。

$$\forall x(P(x) \rightarrow L(x, b))$$

3. 有某个人被每个人所爱。

$$\exists x(P(x) \wedge \forall y(P(y) \rightarrow L(y, x)))$$

4. 牛郎不爱那些爱织女的男人

$$\exists x(M(x) \wedge L(x, b) \wedge \neg L(a, x))$$

5. 织女爱每一个爱牛郎的人

$$\forall x(P(x) \wedge L(x, a) \rightarrow L(b, x))$$

$$\forall x(P(x) \rightarrow (W(x) \wedge A(x)))$$

论域：所有的对象

$\boldsymbol{Px}$：$\boldsymbol{x}$是人

Wx：x需要水

Ax：x需要空气

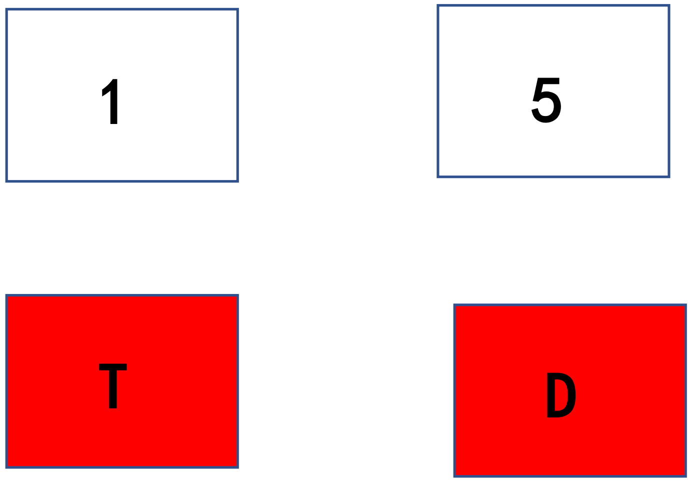
模型与赋值

一阶语言的一个模型$\mathfrak{M}$（解释）包括下列要素：

（1）**个体域D**，即由具有一定性质的个体所构成的集合。

（2）**谓词的解释**（谓词符号在个体域D上的解释），即表示该个体域中个体的性质和个体间的关系。

（3）**常元的解释**（个体常元在个体域D中的值），即个体常元表示该个体域中的某个特定个体。



$$W(5)$$
$$O(5,D)$$
$$\exists x(W(x))$$
$$\neg\forall x(W(x))$$

$$\mathfrak{M} =< D, W^M, R^M,\ O^M, 1^M, 5^M, T^M, D^M >$$

其中各个成分如下：

1. $D = \{b_1, b_5, b_T, b_D\}$
2. $1^M = b_1$，$5^M = b_5$，$T^M = b_T$，$D^M = b_D$
3. $W^M = \{b_1, b_5\}$，$R^M = \{b_T, bD\}$
4. $O^M = \{< b_1, bT >, < b_5, bD >\}$

$$\exists x \exists y O(x,y)$$

- 给定一个模型，规定在此模型的一个**指派**是从变元集到该模型论域的一个函数。常用σ表示指派。
- 一个指派是一个函数σ：它将每个个体变元对应到个体域中的一个个体上。即对任意个体变元x，$\sigma(x) \in D$。
- 一个模型$\mathfrak{M}$和一个模型上的指派合称为一个**赋值**，记作$V_{\mathfrak{M},\sigma}(A)$，在模型$\mathfrak{M}$上指派$\sigma$对A的赋值。

$$A=W(5),\quad V_{\mathfrak{M},\sigma}(A)=T$$

- 公式的真值条件
  - 形如$F(t_1,\ldots,t_n)$的公式在σ下为真，当且仅当，$t_1,\ldots,t_n$表示的那n个体域中个体确实有F表示的那个n元关系，即$<\sigma(t_1),\ldots,\sigma(t_n)>\in\sigma(F)$。
  - 形如$\forall xA$的公式在σ下为真，当且仅当，将A中自由出现的x解释为个体域中的每个个体后，A总为真。
  - 形如$\exists xA$的公式在σ下为真，当且仅当，将A中自由出现的x解释为个体域中的某个个体后，能使A为真。
  - 否定式、合取式、析取式、等值式的真值条件同命题逻辑。

- $\forall x F(x) \rightarrow F(a)$
- $\forall x\big(F(x) \vee \neg F(x)\big)$
- $\forall x F(x) \rightarrow \exists x F(x)$
- $\forall x F(x) \leftrightarrow \neg \exists x \neg F(x)$

普遍有效式

有效性判定

如果推理形式

$$\frac{A_1, A_2, \ldots, A_n}{B}$$

满足：不存在情况使得其**前提都为真**，而**结论为假**那么就称这个推理形式是有效的。

要断定一个推理形式是无效的，只需要给出一种解释（模型），使得在这个解释下，推理形式的前提为真，而结论为假。

∀_规则

$$\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$$

$A(a/x)$，
$\boldsymbol{a}$可以是任意的常元。

¬∀_规则

$$\neg\forall \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$$

$\neg A(\mathrm{b}/x)$，b 为新常元。

¬∃_规则

$$\neg\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$$

$\neg A(a/x)$，
$\boldsymbol{a}$可以是任意的常元。

∃_规则

$$\exists \boldsymbol{x}\boldsymbol{A}$$

$A(\mathrm{b}/x)$，b 为新常元。

- $A(a/x)$ 表示用常元a 去替换公式A 中变元x 的所有自由出现，这种对公式的变形一般称为在A 中用a 代入x。

$$A = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$$

$A(a/v_1)$ $$A(a/v_1) = \exists v_2 R(a, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(v_2)$$

$A(a/v_2)$ $$A(a/v_2) = \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \forall v_1 P(v_1) \vee P(a)$$

❖ **例子：判定**公式$\forall x F(x) \rightarrow F(a)$是否有效？

$$\neg(\forall x F(x) \rightarrow F(a))$$

$$\forall x F(x), \neg F(a)$$

$$F(a)$$

x

由解析树可知，$\forall x F(x) \rightarrow F(a)$ 为有效式。

❖ **例子：判定**公式$\exists x F(x) \to F(a)$是否有效？

$$\neg(\exists x F(x) \to F(a))$$

$$\exists x F(x),\ \neg F(a)$$

$$F(a)$$

x

矛盾是人为产生，并非逻辑导出。

例子：判定$\exists v(P(v) \rightarrow \forall \boldsymbol{v} P(\boldsymbol{v}))$是否有效?

$$
\begin{array}{c}
\neg(\exists v(P(v) \rightarrow \forall v P(v))) \\
| \\
\neg(P(a) \rightarrow \forall v P(v)) \\
| \\
P(a), \neg \forall v P(v) \\
| \\
\neg P(b) \\
| \\
\neg(P(b) \rightarrow \forall v P(v)) \\
| \\
P(b), \neg \forall v P(v) \\
| \\
\times
\end{array}
$$

由解析树可知，$\exists \boldsymbol{x}(\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \rightarrow \forall \boldsymbol{x} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}))$为有效式。

- 小技巧：

- 在运用规则时，先使用联结词规则，然后在使用量词规则。

- 在量词规则中，先运用¬∀_规则和∃_规则。

❖ **例子：判定以下公式是否有效?**

1. $\forall x(M(x) \to P(x)) \to (\exists x M(x) \to \exists x P(x))$

2. $\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \to \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2))$

- 在命题逻辑中，对任意公式，可把其解析树扩展为饱和的，然后做出判定：
- 如果此解析树是闭的，那么原公式是有效的；
- 如果此解析树不是闭的，那么原公式是无效的。
- 在这个意义上，命题逻辑中的解析树是能行判定方法。

- 在一阶逻辑中，对于一个公式，其解析树没有饱和概念（或饱和概念无法用于判定有效性）
- 当原公式是有效时，解析树的生成过程最终会终止，并得到一个闭解析树，由此可判定原公式是有效的；
- 公式的解析树有可能永不终止，此时无法做出判定！
- 在这个意义上，一阶逻辑中的解析树是**半能行判定方法**。

如果发现公式的解析树始终不闭，那么可以猜测原公式不是有效的。有时候，可通过观察已生成的解析树，尝试构造原公式的反模型。

❖ **例子：** 判定$\exists xF(x) \to F(a)$是否有效?

$$\neg(\exists xF(x) \to F(a))$$

$$\exists xF(x), \neg F(a)$$

$$F(b)$$

构造反模型如下：

个体域：$\{a, b\}$。

$F(x)$ 解释为某个性质，使得a 不具有这种性质，但b 具有这种性质。

在这一模型下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

$$\neg(\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)) \to \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2)))$$

$$\forall v_1 \exists v_2 (R(v_1, v_2)), \neg \exists v_2 \forall v_1 (R(v_1, v_2))$$

$$\exists v_2 (R(a, v_2))$$

$$R(a, b)$$

$$\neg \forall v_1 (R(v_1, b))$$

$$\neg R(c, b)$$

$$\exists v_2 (R(c, v_2))$$

$\forall v_1 \exists v_2 R(v_1, v_2) \to \exists v_2 \forall v_1 R(v_1, v_2)$ 的反模型 构造解释如下:

- 个体域: $\{a, b\}$。
- $R(v_1, v_2)$ 解释为某个关系，使得 $R(a,b)$、$R(b,a)$ 都成立，但 $R(a,a)$、$R(b,b)$。

在上一解释下，原公式不为真，故原公式不是有效式。

论域为自然数集N，R（v_1，v_2）解释为自然数集上的小于关系，即$R^N = \{< m, n > | m, n \in N, m < n\}$。在这样的解释下，

“如果任何自然数都小于某个自然数，那么存在自然数，它小于所有的自然数。”

Thanks for your attention!

Q & A