

数学深造班：数学是被发明的还是被发现的

Stuart Rowlands and Alan Davies

曹新编译

作者简介：曹新/赣南师范学院数学与计算机科学学院教师；华东师范大学课程与教学系国内访问学者。（江西赣州 341000）

在面向年轻人的数学教育中，人们几乎将全部的关注放在概念学习和技能发展上，很少为他们提供表达数学信念的机会。然而只要环境适宜，他们能够通过辩论提出极好的见解。本文描述了在提供住宿的环境下涉及10年级学生的一套7节训练课。

1、引言

在过去的7年中，每年6月份的连续3天，来自赫特福德歇尔、德汶、科恩沃尔的10年级天才学生聚集到一起，参加为期三天的提供住宿的课程。这些课程是在赫特福德歇尔和普利茅斯皇家机构天才学生培训小组之间的联合活动。

学生在两小时一节的训练课：“数学是被发明的还是被发现的？”中，要求参加哲学入门课程。经过介绍，学生获悉柏拉图《门诺》中苏格拉底与小奴隶的故事：通过回答苏格拉底的问题，小奴隶自主地导出了毕达哥拉斯定理。苏格拉底式的谈论一开始就用于训练班：教师问一个问题，接着学生回答；教师然后逐个推断出回答的含意或基于学生的回答问另一个问题。对话的目的，是引出学生关于数学是被发明的还是被发现的观点及其理由。所有的学生都被鼓励参加讨论，要求大胆给出问题的答案或提出创见；要认真倾听别人的创见，不能嘲笑别人的看法；也不能独占话语权。在结束前的15-20分钟，学生要写下他们的论点。

每年都有一些评论他们自己观点的不同回答：数学是被发现的；被发明的；发明导致发现；发现导致发明；既是发明又是发现；不能裁

决。下述37段摘录是从7年间全部91份回答中取出的34位学生的一个样本。

2、发现

关于为什么数学是发现而不是发明，这里给了多种多样的理由：

所有存在的事物总是蕴涵着被发现和被使用的重要意义。模式、关系、联结和定理都是被发现的，但它们在发现之前一直存在。

所有的发明都是被发现的。因为某些东西象电视部件总是存在的，只是贝尔德发现了它们并发明了电视。这意味着电视是发现的而非发明的，正如数学原理一直存在着并将被发现。

数学是被发现的，因为它已经在人们的大脑里。人们只需要被告之，或只需考虑让它从大脑中得以显现，并认识到它在大脑里。

我相信数学是一种我们能将其全部联系起来的一个先天体系，因为它在我们的大脑中生成了根，成了大脑中的东西，并逐步以一种我们都明白的共同语言被发现。

下面的论述可能是一个古老问题的答案，如果数学以柏拉图形式存在，那么数学家的直觉是怎样揭示这些形式的？两个学生给出的答案也许表达了这样的观点：数学是严谨结构的写照，我们只需认真思考并形成恰当的语言去揭示它。而在以下的片段中，一个学生论证发现，但什么是发现，也许有不同的表达方式：

三角形的内角和等于 180° 总是存在的，但人们发现它能以不同的方式被注意到，并能用完全不同的途径去描述它，就象英制和米制。

基金项目：赣南师范学院教学改革与研究项目：《师范生说课技能训练体系建构的探索与实践》（2005）。

我们能够发明概念用以解释，但被解释的必须是已存在的：

模式、公式与定律存在于大自然中：在行星的轨道中，在向日葵的花盘中等等。人类从来就没有发明它，如果我们发明了它，那就有能力启动、改变或结束它。如果这发生了，那么在人类存在以前任何东西都不存在。我们能发明概念去解释事物、创造捷径，但不能发明已经存在的事物，而数学是解释存在事物的真理。我们不能发明某物，除非它以某一种方式存在，如果我们能在头脑中想象它，那么它已经存在——我们改进概念，进行理性的解释。我们在发明一种方式理解这些真理之前发现了它们。

下面的例子来源于一个也许被描述成哲学怀疑论者的学生：

我感觉数学从来不是被发明的，我相信它象一个真理一样存在。没有人阻止需求，相反数学是人们探索知识边界的天性带来的结果。我想起我曾被告之的一句原话：“随着我们的知识象海岛一样不断扩张，我们的无知就象那海岸”。

3、发明

下面关于发明的论点没有提及数学如必然真理，这样反而萌发了数学是可错和可变的观点，并表明数学是一种活动形式。下面摘录的是很多学生的一个代表性观点：

我想数学是被发明的：

发展理论是为了适应和运用已有的东西。

如果某物不能产生预期的效果那么它必然被抛弃。

理论是用来证明或是证伪别的事物。

一些选择发明的观点给出了关于数学是怎样被发明的详细论述：

数学是被发明的，因为它是一条联系一个对象与另一个对象的一种途径。在数学存在之前任何对象都是不相关的、孤立的。数学被发明后，对象被组合到一起。例如，我们现在有一些并非单独的树，我们选择如何组合并将对象相互联系起来，但没有发现什么。比如，三个对象不能创造三角形，直到我们发明直线和它们之间的线段。只有发明了用于数数的数，我们才能进行计算。

数学是人类活动形成的一种重组对象的能

力，从研究中抽出结构关系，而且在这个过程中创造出理论上的对象如直线、三角形和数。下面的回答似乎超出了对发明的论述，但却值得详尽引用，因为它表达的一些观点与一些哲学家的看法相似。

就一系列常规隐含的潜质来说，一个具体的数字体系先于抽象系统而存在，就象一位男士在跳墙之前就具备翻越一堵墙的潜力。因此，一旦一个潜在的数学体系的一条基本原理成为惯例，那么它的一切附带的成分必然成为常规，等着被发现，就象研究基本的计数系统那样。

数学总的说来是不存在的。它仅仅是使杂乱得以简化、带来秩序的一种办法而已。在智慧生物之外，秩序是不存在的，因而数学可以仅是概念上的。由于对每一个概念都有着大量的分歧，因而现存的一切都不加理会地成为惯例。

如果没有人能证实，那么任意的三个对象不能构成一个三角形的模型，它仅仅是三个任意的目标。它依赖于人们识别三角形的概念去揭示、证实与联系，使之成为三角形物体进而成为三角形。这意味着人们正在发现他们的潜质去描述一种形状。因此，自然界只不过提供了出发点，任意的点成为三角形的可能性是被发现的。

整个数学系统是围绕数学事实建立起来的。而且由于我们接受了它们的真实性，其它的事物我们必须依次地接受。因此我们不能发明真理，仅仅是认识和发现它们。

这里有鲁宾·赫斯关于数学存在的可能性的观点；康德关于几何象一个综合先前的理智悟性给出的外在例子的信念；同样还有少许拉卡托斯的可错的观念。必须注意的是，这是在15-20分钟时间的回答，但它包含的观点可以在不少训练课中长时间地讨论数学哲学问题。

由学生提及的某些说法是混乱的，然而其中充溢着可能值得继续探讨的结果：

数学是被发现的还是被发明的？数字——思想对象。我想数学是被发明的，因为它需要一种有智力的物种去使用它。我认为它不是被发现的，就象行星一样的例子，因为那意味着数学在以某种方式存在之前已经被创造出来。宇宙中的所有事物已被创造出来，而且不会永远存在。

4、发明导致发现

在整个训练课中，通过提问来提示学生数学既是被发现的又是被发明的。许多回答在相同的视角下详细描述了不同的说法，下面是从数学首先是发明的然后是发现的观点中提取的几小段。

我认为人们以相同的方式发明数学与创造语言……数学中最重要基点和由此引出的法则和定理都是被发现的。

基本性质和基本概念如距离、时间和数一定是被发明的。但围绕这些基本性质的定理是发现的——仅仅以发明出的性质为基础。

数学名词与思维方式的思想是被发明的，但数学事实中的普遍真理是被发现的——利用概念。

也许最有趣的是，我们拥有的几何形状的观念是发明，但它们的性质是永恒的：

完美的圆、正方形、三角形等，在物理世界中不可能存在；它们是人们发明的概念，但是这些图形的性质是被发现的——它们一直存在，甚至在图形的概念被发明之前就存在。

5、发现导致发明

数学首先是发现的然后是被发明的观点，与数学先是被发明然后被发现的观点是不矛盾的：

我认为数学的产生是一个混合的过程。

发现(1) 发明(2) 发现和发明(3)

(1) 我估计我们发现了图形的概念，看见具有斑点和火山外形的事物象圆和三角形。

(2) 我们发明了这些图形的一种完美的描述。

(3) 我们认识到这些图形的数值、性质，进而赋予图形以数值并发明相应的公式。

与此共鸣的是波普尔关于“目标-问题-状态”的观点：问题独立于认识主题而存在，其中的一些问题被固定下来并找出一套解决办法。

数学是被发明的，因为它是对自从时间开始的问题/状态的出现、发展的一个解释。一些问题被发现，以至于我们发明数学是为了处理这些问题。

6、既是发明又是发现

下面三个在发明与发现之间莫衷一是的例子，显示了努力理解发明与发现的信念：

我相信数学法则是被发现的，因为法则一定

是相同的。尽管数学基础知识是被发明的，它们都要遵循相同的法则。

这个问题没有答案……它是两者的混合物。基本的法则一直存在，正如两个直角产生一条直线，它能被证明，然而在人类出现之前不可能阐明这些法则。因此，当人们“发现”了必然真理，它们才得以存在，并因此而发明。所以答案是数学既是发明又是发现。

我们相信数学既是发明又是发现。“ π ”的思想一直存在，但“ π ”的名称、说明、规则和概念是被发明的。在十进制被发明和发明后，“ π ”才能被描述并因此被发现。数学是无限的，因此我们决不能知晓全部。数学没有全部被记载在任何地方，因此未来的发现一定来自我们的大脑，所以一定是发明。

当然，数学经由印刷和数字得以记录，“ π ”被发现/发明，并由先前发明的十进制得以记录。但第三个例子似乎包含了数学对象概念的萌芽，必然真理与它们一直存在有关，并由此被发现。但是我们通过我们大脑的活动发明了这些对象，并运用它们开展研究。

数学法则是发现的，因为它们是真的，甚至在我们发现它们之前……然而，脱离印象和表现形态的数学法则和原理是被发明的，因为它们完全是由人造出来的。

我认为这些真理独立于人类而存在，它们是被发现的。但是发现这些真理的工具必定是被发明的，它引导我们的思想沿着正确的方向去发现真理。

数学成果是被发现的，而数学观念是被发明的。函数总是存在，但如果不是有人发明了概念，它将永远无法被发现。例如，三角形总是存在的，只有发明了三角形的概念，我们才能知晓它们。我想数学是被创造与发现的，因为数学一直存在于人类之前，我们必须揭开通向数学化的迷雾，必须发现与理解它。

一个新颖的建议是：视必然真理为先前的认知，但“形式”是被创造的，以便揭示真理。

数学是发现的，因为规则涉及必然真理。然而，用以描述数学的形式是被发明的，就象表达数学的语言和读音。

也许最老练的回答是：我们在某种程度上创

建（发明）一个数学概念并使之具有普遍性。

我认为数学是被发现与被发明的，看见某物并触发一个想法。那个想法接着能变得更完美，变成一项发明，一个例子是：

一个人外出散步，他看见一个有趣的图形。他能发展那个图形，改变一些线或角，他把得到的图形叫正方形。

这表明那人已经发现了某物，改变它（改变形状，使之更简洁），这是依次创造新事物。它是以前没有邂逅的事物，是一个新概念、一个接着给出的新名字。名字不仅用于描绘一个图形，也经常用以刻画一类相似的性质。

使之“更简洁”想必是使之抽象化或是理想化。我们拥有一份如何抽象的认识论报告看来是可能的，但这点成为引起既是发明又是发现的想法。

7、不能裁决

在任何一个样本中，总是有“不能裁决”的字样，它也许是记录下的一种明智的观点。特别是，自从泰勒斯创始哲学（和抽象的数学）以来，这个重要议题一直是未解决的。

我不能确信数学是被发现的还是被发明的，我发现它难以描述，因为我能看到有些数学是怎样被发明的，比如三角形；但我看不见如何发明象毕达哥拉斯定理这样的事物，因为它是规则。

在给出既是发现又是发明的论据之前，一个学生声明他被描述成不可知论者：

数学是发明的还是发现的？我想这两种说法能够证明是一样的，任何一个坚定的看法都不是真正的证明，无论我写下的是一个相同的还是相反的观点。

相同以及相反的论点都被提供。当然，无力判断也许是一个实用主义的原则：

人们说事情能被证明但没有什么能被证明。每个人看数学都不相同，我确信这没什么关系，因为就象我们怎样生存那样。我所知道的是它在那儿，我精通它，没有别的了。

不承认任何实用的价值观或许是一条原则：

我们认为数学是那些想在数学课中看学生受折磨的魔鬼发明的，因为他是一个讨厌的虐待狂。这些糟老头子拥有太多的时间试图计算“ π ”，既然他们想干掉它。

教师是秘密工作的，但通过（英国）地方教育局取得报酬。第二个句子也许有一点性别歧视的语言，那里有上了年纪的女数学家！

下面的学生决定辨认一般背景之内的数学：

数学是真实世界的理论表现形式的科学的一部分。人们希望知道什么是对的，并试图解释他们生活的世界。当他们知道了一切，他们将控制环境，也许那就是生活的意义！

8、结论

数学深造班里的学生都是聪明的，也许我们能要求他们参与数学问题之外的哲学。我们坚定地相信，给大多数人以机会，学生将受益于关于数学的对话，进而增进他们对数学的理解。一个偶然的意味深长的对话，也许会使可能被称为实在思想家的学生受益，因为它提供了一个机会让他们去思考，从而提高他们操作抽象对象的能力。

我们希望以取自一个学生的几段摘录作为结束，他表达了涉及小奴隶永存心性的数学之怀疑态度。（例如，“苏格拉底是怎样知道男孩已经学习过的内容的？”；“如果灵魂是不朽的，那么是什么使得人们忘记他们以往所学？”）

我想这男孩也许有很好的智力，苏格拉底通过提问的确教给了他毕达哥拉斯定理。我听过很多教师说最好的途径是让年轻人思考要学习的事物，而你询问他们问题……苏格拉底给了这男孩正方形的观念，因此给了他出发点。他接着询问许多问题让男孩思考，我想在没有受到教育的情况下这个男孩证明毕达哥拉斯定理是可能的。

说天空中有三颗星星，看起来象一个三角形。然而，你不能定义它象等边三角形或者直角三角形，等等，因为它仅仅是天空中的三个小圆点。一个人必须将这三个小圆点联系起来并为它命名。

文章来源：Stuart Rowlands and Alan Davies: Mathematics masterclass: is mathematics discovered or invented? John Berry (Ed.), Mathematics in School, MARCH 2006. Vol.35 No.2 : 5-9