

空间观念的基本构成与培养

——兼谈美国如何发展学生的空间观念

王林全

(华南师范大学 510631)

发展学生的空间观念,对于帮助他们理解、解释和欣赏我们现实的几何世界是十分重要的.培养学生的空间观念,是中学生数学课程的主要目标之一.美国在推理能力的训练比我国弱,而在发展学生的空间观念方面比我国有较高的要求,他们的许多理念和做法很有参考价值.

1 空间观念的基本成分

学生的空间观念是与学习者对图形及其相互关系的感知、识别、判断、操作、表述、建构、想象、变换及其运用紧密联系在一起的.在中小学的数学学习中,空间观念应该含有如下基本成分.

1.1 图形的识别与理解能力

学校数学课程要求学生正确识别图形,理解图形的特征性质,根据图形特征把它与其它图形区别开来;能够由实物的形状想象出相应的几何图形,又由几何图形想象出实物的形状.对图形的识别与

理解,是空间观念的基础.

例 1 对特殊平行四边形性质的思考

在课本中往往从四边形对边的关系或对角的关系来定义平行四边形.其实,也可以用对角线为线索,思考各类特殊的平行四边形的性质,使之与其他类型的四边形相互区别.



图 1 从对角线的角度,思考特殊的平行四边形

表 1 对特殊平行四边形对角线的性质的思考

特殊四边形的种类	对角线总能互相平分吗?	对角线总能相等吗?	对角线总能互相垂直吗?
平行四边形	是	?	?
矩形	是	?	?
菱形	是	?	?
正方形	是	?	?

观察条件 $x \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{2}$,

容易发现 $1 \leq f(1) < \frac{1+1}{2} = 1$,

所以 $f(1) = 1$; 又因为 $f(-1) = 0$, 所以

$$\begin{cases} f(1) = a + b + c = 1 \\ f(-1) = a - b + c = 0 \end{cases}, b = \frac{1}{2}, c = \frac{1}{2} - a$$

所以 $f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a$, 它将满足(1)

式,推出

$$\begin{cases} 0 < a < \frac{1}{2} \\ (1-4a)^2 \leq 0, \text{故 } a = \frac{1}{4} \\ (1-4a)^2 \leq 0 \end{cases}$$

所求二次函数为 $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$.

解法 2 观察条件 $x \leq f(x) \leq \frac{x^2+1}{2}$,

容易发现 $1 \leq f(1) \leq \frac{1+1}{2} = 1$,

所以 $f(1) = 1$ 又因为 $f(-1) = 0$,

故设二次函数为 $f(x) = a(x+1)(x-1) + \frac{x+1}{2}$,

即 $f(x) = ax^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} - a$. 下同解法 1.

参考文献

- 1 杨群飞. 在数形结合下构建图形的几个切入点. 数学教学, 2005, 6
- 2 罗增儒. 反思“定比分点法”的一个流行误解. 数学通报, 2005, 7

1.2 图形的分解与组合能力

中学生应该具有对图形的观察、分析、分解和组合能力,包括能够从较复杂的图形中分解出较简单的图形,又能够把若干简单的图形组合为复杂的图形.这种能力是空间观念得以健康发展的基本条件.

1.3 图形的建构与探索能力

中学生应该具有对图形阅读、探究与理解能力.包括能够读懂和画出草图,读懂、用尺规方法以及动态软件画出图形.包括:平面图、简单立体图形的三视图、透视图、截面图、表面展开图.根据坐标描出点的位置,根据点的位置写出该点的坐标.中学生应该掌握推理和证明的基本方法,能够根据图形的某些已知的性质探索推导它的其他性质.良好的图形建构与探索能力,是空间观念发展的标志.

1.4 对图形的运动与变换的欣赏

学生对图形的运动的认识逐步深化,这是他们空间观念逐步成熟的前提.高中生把对变换的认识扩大到位似,并且能够定量的方法,例如向量的方法、矩阵的方法描述图形的变换.

1.5 利用几何直观解决问题能力

几何直观就是根据问题的条件,利用适当的图形、图像描述数学对象,描述其他学科以及日常生活的问题,思考解题思路,预测所得结果.几何直观为利用图形的性质解决问题创造了有利条件.运用几何直观的能力,是空间观念成熟的标志.

例2 探索立体图形表面中两点间的最短路线

已知(a) $ABCD - EFGH$ 是棱长为 a 的立方体木块,在顶点 D 有一点食物,一只蚂蚁正在棱 EF 的中点 I 上.求蚂蚁经过立方体表面或沿着棱到达点 D 的最短路线的长.(b) 正四面体的棱长为 a ,点 N , O 分别为对棱 PK, LM 的中点,求由点 N 出发,经过表面到达点 O 的最短路线的长.

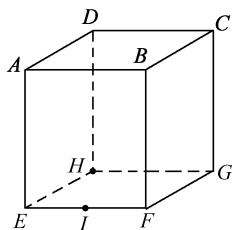
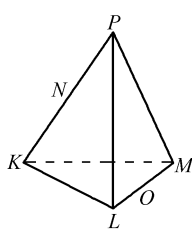


图2 (a) 立方体中
两点间的最短路线

学生可以通过实验试探不同的路线,通过测量



(b) 正四面体中两点
间的最短路线

找出最短路线;也可以通过几何直观,把相邻的两个侧面展平,再求出展开图中 N, O 两点间最短线路的长.前者需要用勾股定理,后者需要利用菱形的性质.

2 空间观念的阶段特征

空间观念与其他数学能力共同发展,相辅相成.在不同的学段,学生的空间观念呈现不同的发展特征.

2.1 空间观念的启蒙阶段 — 图形的操作与感知

小学生的空间观念开始建立,能够使用一些非正式的语言说明图形某些特点.通过观察、触摸、实验和操作逐步感知、识别各种几何图形,他们的空间观念,随着数学经验的积累与丰富,逐步打下初步的基础;六岁左右的儿童,已具备对图形的认识能力,小学低年级是几何启蒙的最佳时期.小学生应该初步认识二维、三维基本几何图形的名称、形状、性质和特点.

2.2 空间观念的形成和发展阶段 — 图形的认识与推理

初中生处于空间观念的形成和发展的关键阶段.他们应该能够学会用演绎推理,并能用正式的数学语言阐述与解决数学问题.在对图形的观察、实验和研究的基础上,建立某些猜想,学会用演绎方法证明某些数学命题,能够对解决问题的过程作出有说服力的解释.初中生应该理解定义、公理和定理在数学推理中的作用,通过推理论证,促进对图形特征更深入的理解,导致空间观念的进一步发展,初中阶段的末期,学生的空间观念建立起来,能够初步形成合理的几何直观.

2.3 空间观念的完善与运用阶段 — 图形的联系与建构

高中生的空间观念有待继续完善.他们有可能对图形进行更多独立的探索,从中能体会推理和证明在数学理解方面的作用.

运用动态几何软件,有助于研究图形运动的特点与规律;利用坐标方法,把曲线和方程联系起来;通过探索动点运动的规律,并用轨迹方程予以表示;利用向量的方法,也能够探索图形的几何特征及数量关系,灵活运用数形结合方法;通过对几何变换的研究,能够发现图形运动的某些不变性质.

学生空间观念的发展不是同步的,各个阶段之间并不存在明显的界线;每个阶段的学习,都是上

一学段认知的强化, 又为下一学段的作出铺垫. 发展空间观念要根据学生的实际水平有针对性地地进行.

3 发展空间观念的教学要领

学生的空间观念应该建立在他们对图形丰富的感性认识的基础上. 为了建立这种认识, 要让学生从低年级开始, 就通过多种途径感知与认识图形、模型与实物. 能观其外形, 触其表面, 读其名称, 辨其特征, 分拆重组, 进行分类. 在实验与操作中, 让学生有充裕的时间, 建立有关几何图形的表象.

3.1 加强实验操作 发展直观感知

在实验与操作的基础上, 认识图形的特征性质, 开展有关几何关系的数学论理, 包括归纳推理和演绎推理. 直线的平行与垂直, 图形的全等与相似, 是空间关系的重要组成部分.

例 3 从制作风筝引起的猜想

观测图 3 右边几个相似的小三角形, 把它们贴成左图风筝的形状. 研究这些相似三角形的对应角、对应边长比、对应周长比、对应面积比, 得到什么发现?

以上探索能给学生提供许多机会, 使他们发展并评价所得到的猜想. 学生们可以发现并概括相似三角形的许多性质. 他们可以利用动态软件验证猜想, 用规范的数学语言表述猜想, 还可以用演绎推理的方法证明其猜想.

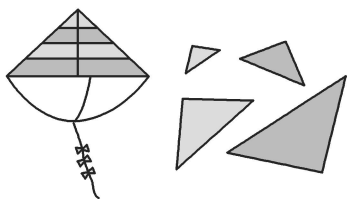


图 3 由重叠相似三角形制作风筝所引起的猜想

3.2 说明图形的定位 描述空间关系

小学生非正式地学习几何变换, 在诸如弹射、转动、滑动和放缩等运动中, 描述图形的大小、位置和方向. 初中生从图形全等和空间定位的角度学习平移、旋转和轴对称. 在动态软件的帮助下, 从定量方面了解几何变换的性质; 高中生进一步学习变换的合成及变换的数学表示.

例 4 对反射与旋转的探索

教师分别向学生展示轴对称和旋转的图形, 并让学生观测分析:

(1) 在反射变换中, 原象与象与反射轴有何位置关系. 如图 4(a),

(2) 在旋转变换中, 原象与象与旋转中心的联系, 如图 4(b).

利用动态软件, 学生可以看到, 在反射变换中, 每一组对应点与反射轴的距离相等, 每组对应顶点的连线被反射轴垂直平分; 如图 4(a) 所示, $CG = C'G$, $CC' \perp EF$; 类似地, 在以点 K 为中心的旋转变换中, 对应顶点与变换中心 K 的距离相等. 每一组对应顶点关于对称中心的张角等于旋转角. 如图 4(b) 所示.

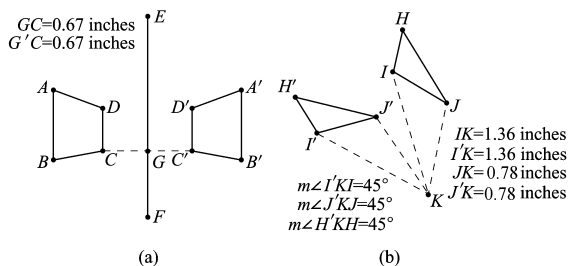


图 4 学生利用动态软件探索反射(a) 旋转(b) 的结果

3.3 注意逆向思维 多方表示变换

既可以给出已知图形, 要求学生根据变换的定义和性质, 作出变换的象; 也可以根据原象和象, 反思相应的变换, 从而促进学生空间观念的灵活性.

例 5 如图 5, 已知三组全等图形. 试分别为每组全等图形确认相应的变换, 使得根据这个变换, 从一个图形变为该组中另一个图形.

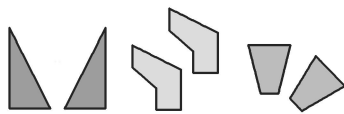


图 5 全等图形是由什么变换产生的?

具有丰富几何变换经验的学生, 可以看出第一组图形与反射变换相联系, 第二组图形与平移变换相关, 而第三组图形既可以与反射变换相关, 也可以与旋转变换相关. 教师可以建议学生更精确地描述这些变换, 例如: 对于第一组图形, 确定对称轴的位置; 对于第二组图形, 确定平移距离和方向; 对于第三组图形, 确定旋转中心和旋转角, 等等. 在研讨的过程中, 学生将对几何变换产生更深入、更灵活的理解. 例如, 对于第二组图形, 所对应的变换, 是沿着与水平线成 45° 角的平移, 平移的距离是 1.5cm.

高中生应该学习用多种办法表述变换,包括利用矩阵说明变换.用函数符号表示变换,理解变换合成的效果.无论哪一个年级,都要注意对称性在艺术上和建筑方面的应用.

3.4 重视维数转化 突出内在联系

传统的教材把几何内容划分为平面几何、立体几何、平面解析几何、空间解析几何.这样做有利于分别探讨二维图形与三维图形各自的性质,然而这样做又往往忽视了不同维数的紧密联系和转化.美国数学课程重视二维、三维图形的转换,它们是被联系在一起学习的.例如,小学生能够用纸制的展开图包封三维图形,通过平面图形折叠造成三维图形;初中生通过剖截面和展开图,使三维图形转化为二维图形,并说明一个立体的俯视图和侧视图;而高中生则要求根据给定的正视图、侧视图画出相应的结构图.这就会对学生的能力形成挑战,促使他们的空间想象力健康开展.

例 6 给出一组立方体积木结构的侧视图和正视图,分别如图 6(a),图 6(b) 所示.试利用方块积木构造出符合条件的图形.

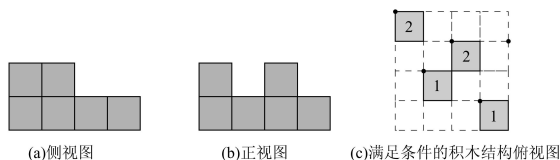


图 6 积木结构的视图

3-5 年级学生能够确定,是否有多于一个建筑物同时满足上述两个条件.初中生应该思考至少需多少积木才能构成符合条件的图形.学生惊喜地发现,至少需六块积木,就能够构成满足条件的积木结构.如图 6(c),就是符合题目要求的结构图的一个俯视图,方格内的数字是在该位置上堆积的立方积木数.事实上,满足条件的图形不只一个!

3.5 联系现实生活 渗透数学思想

美国数学教学涉及较宽阔的知识面,而且有较强的生活气息.例如图论与优化问题,我国在高中选修 4-8 才学习,而当前开设该选修专题的学校并不多见.然而,类似的网络问题,却是美国初中数学的内容.

例 7 卡罗琳的收款路线.卡罗琳的工作是定期到附近几个停车场的收款机收集停车主所缴纳的停车费.她想寻找一条有效的收款路线,使得起点

和终点都在同一处,而且所有街道都只走过一次.

(1) 如图 7(a) 指出她所需要走过的街道,试求她所想要走的合理路线;

(2) 如图 7(b),比图 7(a) 增加一条街道 BG,因而卡罗琳需要经过的街道也增加了.你能够找出一条有效的路线把新增的街道也包含进去吗?

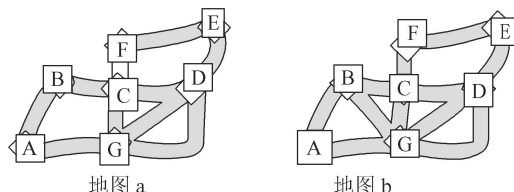


图 7 利用网络解决有效路线问题

为了说明网络的效用,可以让学生思考图 7(地图 a、地图 b) 所示的问题.教师可以要求学生在地图 a 中决定一条或几条卡罗琳可以使用的收款路线.鼓励学生说出各自的解答,让同学分享.如图 a,按照顺序 ABCDEFGA 就是一条有效路线.学生还要说明他们是如何找出这些路线的.学生应该注意到每一条路线的始——终点,确定他们所找到的不同有效路线的数目.

然后,教师又让学生对于地图 b 寻找有效路线.学生最后断定,在地图 b,找不到适合问题条件的路线.为了解决学生的困惑,教师可建议他们计算与每个节点相联的路径数,让学生理解找不到适合条件路线的原因.上述这类课外探究活动,为在高中学习哈密顿回路问题作了有益的铺垫.

4 美国教学经验的若干启示

(1) 空间观念作为数学课程的主线,起步早,坡度缓,循环多,方法活,由浅入深,逐步培养;

(2) 例题生活气息浓,题材新颖,适合青少年学习心理特点;

(3) 突出数学的内在联系,渗透近现代的数学思想,含而不露,入口浅而寓意深;

(4) 用多种语言分别表达同一数学对象,使学生领悟数学的多样性与统一性.

参考文献

- 1 NCTM. Principles and Standards for School Mathematics. nctm.org, USA
- 2 王林全. 发展学生计算能力的途径. 数学通报, 2003, 11
- 3 王林全. 美国几何教学改革的启示. 学科教育, 2000, 9
- 4 徐明杰. 浅谈空间想象力的培养. 数学通报, 2005, 6