

建构主义教学与长方形面积问题表征

辛自强, 张梅

(北京师范大学 发展心理研究所, 北京 100875)

摘要:小学生对长方形面积问题的表征水平及其与建构主义教学的关系表明:预设好的不同模版长方形面积问题的难度具有等级序列性,对此现象可用“关系—表征复杂性模型”有效解释;建构主义教学对复杂性不同的长方形面积问题的表征水平有不同影响,等级越高的模版受建构主义教学的影响越大;建构主义教学的7个维度中“满足学生需要”、“讨论式教学”、“设置概念冲突”、“激励学生反思和研究概念”、“同伴分享观点”等维度对4个模版有影响。

关键词:建构主义教学;问题表征;关系—表征复杂性模型

中图分类号:G421 **文献标识码:**A **文章编号:**1004-9894(2008)03-0045-04

1 问题提出

数学认知研究是20世纪80年代以来认知研究的重要方面和热点,它的兴起是在认知心理学从过去“纯粹”的信息加工层次的研究转向涉及知识层面的认知研究的大背景下,认知心理学与数学心理学相结合的产物^[1]。其中,数学问题,特别是数学应用题解决过程的研究倍受关注。Mayer认为数学问题解决的两个重要成分就是问题表征和解决计划的执行,并指出儿童解题过程中遇到的主要困难是问题表征,即将问题的文字转化为心理表征^[2]。Kintsch和Greeno也指出应用题解决的关键是问题表征,而问题表征的关键是理解集合之间的关系^[3]。在上述文献和自己的实证研究基础上,辛自强提出了“关系—表征复杂性模型”,试图为更加精细地考察或区分儿童的表征能力提供理论框架^[1]。这一模型区分了数学问题本身的难度和问题解决难度两个方面。问题难度是问题本身的属性,数学应用题中最本质的属性往往是题目所涉及数量或集合关系的复杂性,因此,问题难度可以从“关系复杂性”的角度加以分析:在水平方向上关系的多少或数量就表示了问题中关系的水平复杂性;而由关系的层级数决定的问题的复杂性称为关系的等级复杂性,关系复杂性影响对问题的表征和解题过程。对应于关系复杂性的水平与等级之分,问题表征的质量也相应从两个方面衡量:一是表征广度,指能同时表征的同一层次上集合的数量;二是表征深度,即能够理解的关系的最高层次,二者统称为“表征复杂性”。该模型不仅可以区分儿童是否能够表征某种集合关系,还能确定儿童具体的表征水平^[4-5]。因此,在分析个体的表征水平时若对所表征的问题进行了清晰的界定,便可以测查其所能达到的相应表征的广度和深度。这一模型得到了许多实证研究的支持,可以较好地描述数学问题以及其它任务的特点和解题者的表现^[4-7]。

在诸多的数学应用题中,长方形面积问题引起了数学认知研究者的关注。Mayer在20世纪80年代对数学问题进行了分类,认为任何应用题都可以描述为由一系列独特命题组成的图式或模版(template),并指出这种模版具有等级序列性。澳大利亚的Low和Over两位学者进一步探讨了模版的等级序列性。他们经过研究证明长方形面积计算的4个模版

具有等级序列性:如果被试不能对一个简单的问题分类,也就不能意识到更难问题的结构;若被试缺乏问题相关图式,就会用低一级的模版来解决问题^[4-8]。辛自强提出的“关系—表征复杂性模型”进一步解释了这一现象的本质:不同模版之所以存在等级序列性,其本质是问题本身关系复杂性的不同导致了对问题表征水平的不同。实证研究指出,优、中、差生在长方形面积问题4个模版上的表现不同,优秀生通常比普通生有更高的图式水平和知识基础,更善于表征问题中复杂的集合关系^[5]。所以,复杂性不同的长方形面积问题可用于鉴别儿童表征水平。

数学认知研究的最终目的是为教育实践服务,长方形面积问题表征的研究可以为其它具有这种层次组织的数学知识的教学提供借鉴。而数学认知的研究往往会涉及教育背景,如数学教学的建构主义特征。建构主义既是一个认识论流派,也是一种学习理论,它对数学教育影响深远,为当前的教育改革提供了理论基础。目前建构主义者大都强调“以学生为中心”,强调学生对知识的主动探索、主动发现和对所学知识意义的主动建构^[9-10]。

为了便于对建构主义教学进行评估,美国佛罗里达州立大学的Tenenbaum等人应用质性研究方法总结出建构主义教学的7个核心特征:(1)在整体的教学氛围或环境上,以学习者为中心,而非教师中心或内容中心;(2)在教学内容上,侧重来自现实的或真实世界的知识,而不能是纯理论化的;(3)注意利用学习者的个人经验;(4)鼓励学习者之间的互动,并由教师适当指导;(5)鼓励学习者的出声思维;(6)重视并鼓励学习者对教学做出贡献;(7)重视思维技能和理解能力的发展。为了便于对教学进行定量评估,Tenenbaum等人以上述7个特征为基础编制了建构主义教学评估问卷。经过一系列修订程序后,从150个项目中抽取出了效果最好的30个项目形成了问卷的最后版本,该版本包括与上述7个特征基本对应的7个维度^[11]。这7个维度的涵义分别为:(1)“讨论式教学”:包括教师鼓励学生表达不同的见解、提出新颖的想法,允许学生与其交流想法、讨论思维技能以及进行课堂讨论等。(2)“设置概念冲突”:强调在导入新课的过程中,为学生设置认知冲突或建立新旧知识之间的联系。(3)“同伴分享观点”:它涉及组织学生进行课堂

收稿日期:2008-02-10

基金项目:国家自然科学基金项目——中国儿童表征能力发展特点及影响因素研究(30500162)

作者简介:辛自强(1975—),男,山东费县人,副教授,硕士生导师,主要从事认知发展、数学学习研究。

交流或小组讨论,让每个同学有机会向其他同学表达想法、分享经验。(4)“有效设计教学材料和资源”:强调了在现代教学背景下,开发利用各种教学材料和资源。(5)“激励学生反思和研究概念”:指激发学生勤动脑、爱思考,学会总结所学知识,学会比较各种概念或者解题方法的异同。(6)“满足学生需要”:强调教学既要针对学生的认知特点(如对疑难问题的关注),也要考虑影响他们发展的非认知因素(如兴趣、需要、目标、成就感等)。(7)“教学的现实性”:指学生知识的建构应该放在现实的背景下,并且学以致用,为现实服务^[11, 12]。该问卷在理论上假定,教学实践总是可以在这些维度,也即这些从无到有的连续体上加以标定,从而反映出特定教学实践的建构主义成分或特征是否明显。该问卷已经由辛自强等进行了编译和修订,使其适用于我国中小学教育^[12]。本研究将使用这份问卷评估数学教学的建构主义特点,并考察它对长方形面积问题表征是否具有预测作用。

2 方 法

2.1 被 试

整班选取山东省潍坊市一所小学4~6年级共300名学生为被试,这些学生来自6个班。被试的基本特征见表1。

表1 被试的统计学特征

	四年级	五年级	六年级	总体
男 生	44	46	56	146
女 生	57	57	40	154
年级人数	101	103	96	300
平均年龄	10.50	11.50	12.45	11.47

2.2 测量工具

2.2.1 长方形面积计算问题测验

测验材料由辛自强依据 Low 和 Over 所用长方形面积计算问题修订^[4-5, 8]。测验涉及如下4个不同已知条件的模版:两条邻边已知;一边以及它与邻边的关系(倍数或和差关系)已知;周长与一边已知;周长以及邻边的关系(倍数或和差关系)已知,要求根据已知条件来求长方形的面积。测验共

8道题^[4],分别对应上述4个模版,要求被试列式计算。计时按列式的对错计分,而不考虑计算错误,以此测量长方形面积问题的表征水平。

2.2.2 建构主义教学评估问卷

本问卷由 Tenenbaum 等人于2001编制^[11],国内版本由辛自强等修订^[11, 12]。问卷包括7个维度共30个项目,每个项目都是对建构主义教学行为的正面描述,让学生对教师的行为采用5级评定,1为“从不这样”,5为“总是这样”。另外,在问卷之前,让学生填写本人与数学老师的基本资料。该问卷具有很高的信效度^[12],本研究中,此问卷修订后中文版的内部一致性信度为0.947,各维度的内部一致性系数在0.615~0.847之间;7个维度只有中等及以下程度的相关,表明结构效度良好。

3 结 果

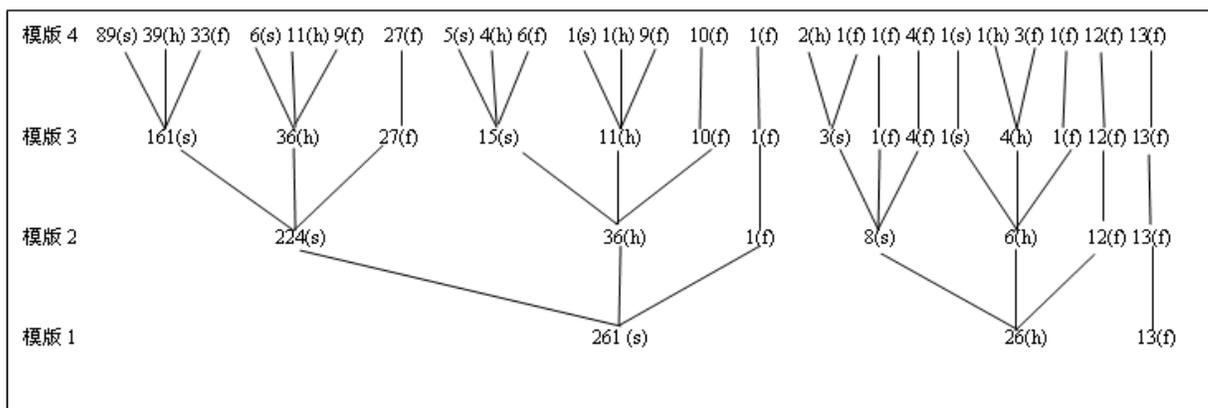
(1)4个模版长方形面积问题难度的等级序列性见表2。

表2 长方形面积计算测验上4种模版问题的正确率

模 版	正确率	
	<i>M</i>	<i>SD</i>
1. 两条邻边	0.913	0.240
2. 一边及邻边间关系	0.843	0.312
3. 周长与一边	0.687	0.415
4. 周长及邻边间关系	0.437	0.445
所有问题	0.720	0.282

由表2可知,4个模版上的解题的正确率是逐渐降低的,模版1的正确率为91.3%,模版4的仅为43.7%。重复测量的方差分析表明,在面积计算测验上4种模版之间存在极为显著的主效应, $F(3, 300) = 193.269, p < 0.001$ 。前后两个模版配对 *t* 检验表明,前后两个模版之间的正确率均有极其显著的差异($t_{(1-2)} = 5.700, p < 0.001$; $t_{(2-3)} = 7.453, p < 0.001$; $t_{(3-4)} = 11.519, p < 0.001$)。这说明,在长方形面积计算方面,这4个模版存在明确的难度等级,相应的图式知识也是等级化组织的。

(2)各模版上的解题成败情况见图1。



注:s表示两题全对,h表示一对一错,f表示两题全错

图1 面积计算测验上每个模版的成败人数

在面积计算测验中共有8道题,每个模版分别涉及两道题。这样在每个模版上的解题情况可以分成3种:两题的解答全部正确、一题对一题错、两题的解答全部错误。图1

说明了各种模版上解题的成败情况。由图1中数据计算可知,从模版1到模版4,两道题全部正确的比率分别是87.0%、77.3%、60.7%、34.0%,这说明4个模版间具有显著的难度

级差。从解题的错误率来看,模版1上全部错误的个体在较高级的3个模版上也全部错误;在模版2上全部错误的个体在模版3、4上也全部错误,更高模版上的情况也是如此。这说明了高一层的模版必须以低一层的模版为基础,如果低一层模版上的问题不能解决,一般也难以解决更高层次的问题。这些说明4个模版存在等级序列性。

(3) 建构主义教学成分评估见表3。

表3 建构主义教学总体与各维度上的平均分和标准差

维度	M	SD
讨论式教学	4.445	0.762
设置概念冲突	3.877	0.949
同伴分享观点	4.242	0.943
有效设计教学材料和资源	3.801	1.090
激励学生反思和研究概念	4.463	0.640
满足学生需要	4.515	0.658
教学的现实性	4.578	0.673
整个问卷	4.274	0.660

由表3可知,整个问卷上建构主义教学的平均分为4.274,说明数学课堂的建构主义成分还是比较多的。以维度为被试内因素进行的方差分析表明,7个维度上得分有所差异, $F(6, 300) = 95.500, p < 0.001$ 。例如,在“教学的现实性”、“激励学生反思和研究概念”、“满足学生需要”上得分较高,而在“设置概念冲突”和“有效设计教学材料和资源”上得分偏低。

(4) 建构主义教学与长方形面积问题表征的关系见表4。

表4 建构主义教学对长方形面积问题表征的整体影响

模版	β	t	R^2	p
模版1	0.207	3.657	0.043	0.000
模版2	0.189	3.320	0.036	0.001
模版3	0.334	6.121	0.112	0.000
模版4	0.412	7.801	0.170	0.000

为了探明建构主义教学对长方形面积问题表征水平的影响,以建构主义教学的总平均分为预测变量,分别以4个模版长方形面积问题表征水平为因变量进行回归分析(表4),结果表明,所建立的4个回归模型均有统计学意义($p < 0.01$),而且建构主义教学对不同模版长方形面积问题表征的解释率大致成上升趋势,建构主义教学对模版1解释率只有4.3%,而对模版4的解释率上升为17%。这说明越复杂问题的表征,建构主义教学对它的预测作用越明显。

为了进一步说明究竟是建构主义教学的哪些维度影响长方形面积问题的表征,以建构主义的7个维度为预测变量,分别以4个模版问题的表征水平为因变量,采用全部进入法进行回归分析(见表5)。结果显示,建构主义7个维度中“满足学生需要”对4个模版均具有负向预测作用($t = -1.992, p < 0.05; t = -2.524, p < 0.05; t = -0.232, p < 0.05; t = -2.358, p < 0.05$)。此外,“讨论式教学”对模版2具有正向预测作用($t = 2.268, p < 0.05$),“设置概念冲突”、“激励学生反思和研究概念”对模版3具有正向预测作用($t = 2.036, p < 0.05; t = 2.163, p < 0.05$),“同伴分享观点”对模版4具有正向预测作用($t = 2.847, p < 0.05$)。

表5 建构主义教学不同维度对长方形面积问题表征的影响

建构主义教学维度	模版1		模版2	
	β	t	β	t
讨论式教学	0.141	1.419	0.225	2.268*
设置概念冲突	0.133	1.917	0.130	1.885
同伴分享观点	0.072	0.724	0.056	0.572
有效设计教学	0.113	1.368	0.061	0.742
激励学生反思	-0.053	-0.543	-0.014	-0.142
满足学生需要	-0.186	-1.992*	-0.234	-2.524*
教学的现实性	0.046	0.526	0.014	0.165

建构主义教学维度	模版3		模版4	
	β	t	β	t
讨论式教学	0.110	1.160	0.159	1.734
设置概念冲突	0.135	2.036*	0.071	1.107
同伴分享观点	0.152	1.605	0.261	2.847*
有效设计教学	-0.019	-0.243	0.036	0.467
激励学生反思	0.202	2.163*	0.099	1.105
满足学生需要	-0.232	-2.603*	-0.203	-2.358*
教学的现实性	0.064	0.771	0.072	0.900

4 讨 论

4.1 长方形面积问题不同模版的等级序列性

如前所述,一些研究者已经间接或直接地表明,长方形面积问题不同模版具有等级序列性^[5-8, 13],本研究验证了这一观点。对此现象,辛自强提出的“关系—表征复杂性模型”可以给出较好的解释。这种等级序列性是由于题目本身的关系复杂性和知识基础要求的不同所致(见表6),通过分析这4个模版在这两方面的不同就可以解释被试在不同模版上的表现^[5]。

表6 四种模版问题的关系复杂性及所要求的知识基础

模版	集合	初级关系	二级关系	三级关系	面积公式	周长公式
1. 两条邻边	3		×	×		×
2. 一边及邻边间关系	4			×		×
3. 周长与一边	4			×		
4. 周长及邻边间关系	5					

注:“√”表示表征该模版上的问题必须用到的关系或公式;“×”表示不必表征的关系或公式

在模版1上,有长、宽、面积3个集合,理解3个集合的关系,即表征初级关系就可以直接解决问题。

在模版2上,有邻边的关系(倍数或差)、长、宽、面积4个集合,被试先要表征邻边之间的初级关系,在理解初级关系的基础上才能表征长、宽与面积的关系,从而解决问题,这时长、宽与面积的关系成了二级关系。

在模版3上,有周长、长、宽、面积4个集合。被试先要表征周长与长、宽之间的初级关系,在理解初级关系的基础上才能表征长、宽与面积的关系(二级关系),从而解决问题。与模版2不同,在模版3中表征初级关系应该用到周长公式。

在模版4上,有邻边的关系(倍数或差)、周长、长、宽、面积5个集合。被试先要表征邻边之间的初级关系,在理解初级关系的基础上才能表征长、宽与周长的关系(二级关系),最后再表征长、宽与面积的关系(三级关系),从而解决问题。与模版3相同的是要运用到周长公式,但不同的是模版4要求表征到三级关系,表征深度增加,同时要表征的集合数量也增加为5个,要求的表征广度加大。

总体上,这4个模版上的问题所包含关系的等级复杂性或者说要求的表征深度在逐步增加(除了模版2与3相同),关系的水平复杂性或者说所要求的表征广度(集合数量)也在增加(除了模版2与3相同),同时对解题所要求的知识基础也在增加,这决定了4种模版上问题解决难度的级差或者模版的等级序列性,具体表现在解题正确率上的差别(见表2)。由此可见,分析问题的关系复杂性,是确定问题解决难度的有效途径;另外,这种分析还应考虑到对被试知识基础的要求。本研究中,模版2与3无论是对表征广度还是深度的要求都是相同的,唯一不同的是模版3需要周长公式这方面的知识基础,而模版2不需要。因此,模版3比模版2更难一些。

4.2 建构主义教学对长方形面积问题表征的影响

建构主义认为知识是个体在与外界的不断地相互作用下建构起来的,不同学习者建构的外部客观现实不同。为了促进学习,必须保证合适的教学情景,使学习者的认知结构与外部世界保持和谐的相互作用^[12]。因此,不同的教育环境会影响到教学的效果。本研究证明了建构主义教学对长方形面积问题表征的预测作用。从整体上来看,在长方形面积

问题的表征上,随着模版复杂程度的增加,建构主义教学的作用也逐渐增强,这说明越复杂问题的表征越受益于建构主义教学。所以,采用建构主义的教学方式可以促进学生的数学认知。而且随着表征复杂性的升高,“讨论式教学”、“激励学生反思”、“同伴分享观点”的作用逐渐突出。在教学实践中,随着表征要求的增高,应该多注意应用这几方面建构主义教学的要素。

这里强调建构主义教学的同时,也要注意不应把建构主义教学 and 传统教学简单对立起来;实际上,它们只不过是代表了一个连续体的两端,我们可以沿着这个连续体向着建构主义的方向努力,用建构主义思想指导我们的教学实践^[12]。在7个维度中“满足学生需要”这一维度对长方形面积问题表征的影响却是负向的。这或许因为满足学生需要,更多考虑的是学生的非智力因素,这方面对学生的宽松,反而不利于发展复杂的思维能力;此外,也说明建构主义的一些特征可能会带来不利影响。有研究指出,对于8~11岁儿童来说,只有女生更适合于建构主义的学习背景,而男生更适合传统教学方式^[14],当然这是以后的研究中仍需要进一步关注的问题。

[参 考 文 献]

- [1] 辛自强. 知识建构研究: 从主义到实证[M]. 北京: 教育科学出版社, 2006.
- [2] Mayer R E. Mathematics [A]. In: R F Dillon, R J Sternberg. Cognition and Instruction [C]. Orlando: Academic Press, 1986.
- [3] Kintsch W, Greeno J G. Understanding and Solving Word Arithmetic Problems [J]. Psychological Review, 1985, 92(1): 109-129.
- [4] 辛自强. 问题解决与知识建构[M]. 北京: 教育科学出版社, 2005.
- [5] 辛自强. 关系—表征复杂性模型的检验[J]. 心理学报, 2003, 35(4): 504-513.
- [6] 李楨. 高中生化学问题解决中的表征与策略研究[D]. 吉林大学, 2005.
- [7] 窦东徽. 顿悟问题的关系—表征复杂性及其作用机制研究[D]. 北京师范大学, 2005.
- [8] Low R, Over R. Hierarchical Ordering of Schematic Knowledge Relating to Area-of-rectangle Problems [J]. Journal of Educational Psychology, 1992, 84(1): 62-69.
- [9] Simon M A. Reconstructing Mathematics Pedagogy from a Constructivist Perspective [J]. Journal for Research in Mathematics Education, 1995, 26(2): 114-145.
- [10] Richardson V. Constructivist Pedagogy [J]. The Teachers College Record, 2003, 105(9): 1 623-1 640.
- [11] Tenenbaum G, Naidu S, Jegede O, et al. Constructivist Pedagogy in Conventional On-campus and Distance Learning Practice: An Exploratory Investigation [J]. Learning and Instruction, 2001, 11(1): 87-111.
- [12] 辛自强, 池丽萍, 张丽. 建构主义视野下的教学评估[J]. 教育研究, 2006, 27(4): 55-60.
- [13] 郭兆明, 宋宝和, 张庆林. 数学应用题图式层次性研究[J]. 数学教育学报, 2006, 15(3): 27-30.
- [14] Timmermans R E. Gender-related Effects of Contemporary Math Instruction for Low Performers on Problem-solving Behavior [J]. Learning and Instruction, 2007, 17(1): 42-54.

Constructivist Pedagogy and the Representations of Area-of-rectangle Problems

XIN Zi-qiang, ZHANG Mei

(Institute of Developmental Psychology, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

Abstract: This article mainly discussed the relationship between the representations of area-of-rectangle problems and constructivist pedagogy in the framework of relational-representational complexity model (Xin, 2003, 2004, 2005). A total of 300 elementary school students participated in the study and finished an area-of-rectangle problems test and constructivist pedagogy evaluation questionnaire. The results indicated that 4 templates of area-of-rectangle problems were hierarchically organized and this could be explained according to the relational-representational complexity model. This study also found that constructivist pedagogy had different influences on the representations of area-of-rectangle problems with different relational complexity. Among the 7 dimensions of constructivist pedagogy, “meeting students’ needs”, “arguments, discussions, debates”, “motivation toward reflections and concept investigation”, “sharing ideas with others” had effects on the representations of four templates of problems.

Key words: constructivist pedagogy; problem representation; relational-representational complexity model

[责任编辑: 周学智]