

什么是实数

曹之江

(内蒙古大学 数学系, 呼和浩特 010021)

实数一词,对于许多人来说,也许并不感到陌生,但他们却不一定真正懂得它.实数究系何物?我们为什么需要它?它为什么会产生,又是如何产生的?.....这些问题若要给予一个明白而完全的回答,需要人们有相当的抽象理性思维和数学逻辑演绎的水平,要能克服因经验而形成的许多认识障碍,这对于未经严格专业训练的人来说,自然是不容易的.本文的目的,就是试图用平易的语言和浅俗的叙述,讲一讲实数的道理,它是应什么“运”而生的?它在现代生活中的价值和意义何在?知晓了这些道理,可以使人们领略到现代抽象数学的方法和形式,而这对于他们学习和理解现代科学的思想和技术,是大有裨益的.特别地,对于从事数学教学的人来说,弄明白这些最深层次的道理,对于他们搞好现行的教学,是绝对必需的.

自然数和有理数 数是一种人们用以记叙事物的量的语言工具.当人类进入了文明时代,开始有了语言的时候,也就有了最早的数.人类早期所掌握的数,个数是很少的,以后随着生产和交换的不断发展,人们在实践中进一步扩大和完善了数的语言.譬如人们创造了十进位(或其它进位)的记数法,使得记数的范围得到了无限的扩大;又如人们学会了数的加、乘运算,从而使得所掌握的数集,演进成了一个有顺序和代数构造的语言系统.人类最先形成的数系,就是今天人们常说的自然数系.自然数是人类在长期的生活实践中逐渐地自然形成的,不是什么伟大人物的创造和恩赐,正如德国数学家克罗内克(Kronecker L)所说:“自然数是上帝给的”,远古的人类,不论居住在何方何域,尽管相隔千山万水,但事实证明,他们均用了自己的字符和声符,表出了虽然形式不同但彼此同构的自然数.

然而自然数作为定量的语言,并不是完善的.用数学的术语来讲,自然数是一种离散的、不稠密的数系.因此作为一种计量的工具,它只能描述事物个体的多寡,而不便于去描述事物的局部.此外,作为一种计量的工具,也即从运算上来讲,自然数不能自由地施行加、乘的逆运算(它对于减、除运算不封闭),这些当然都是不方便的.这就促使人们在自然数的基础上,通过长期的生活实践,进一步创造了小数、分数以及负数和零,从而使自然数系扩展成了一个稠密的对四则运算封闭的数域,这就是众所熟知的有理数域.有理数完全是用自然数构造的,是自然数的自然衍生,同样不是大人物的智慧创造,因此它仍应认为属于“自然”数的范畴.

在现实应用上,有理数已是一种完善的定量语言工具,它可以在任何精度上,对宇宙万物,大至星际空间,小至原子内部,进行精密的定量表述和相应的演算,成为人们在日常工作与生活中得心应手、不可或缺的工具.既如此,那么我们为什么还需要什么“实数”呢?这“实数”究系何物?它从哪里来?它的价值是什么?

实数是一种理性的实在 实数的发现,可谓是人类理性主义思想发展史上的一件大事,是现代抽象数学兴起和发展的界石.那么,实数是怎样发端、产生,又是如何发展并深深地进入到现代人的观念领域中的呢?这最早可追溯到纪元前五百多年的古希腊时代,当时有一个以毕达哥拉斯(Pythagoras)为首的团体,以探索数和宇宙奥秘为自己的宗旨.这个团体中有人竟发现了一个惊人的事实:正方形的对角线与其边长是不可公度的!所谓两个线段是不可公度的,是指在它们之间,不存在任何(即使极其微

小)公共的可整度的量.由于与单位长1可公度的线段长度必可表示为 n/m (n, m 为自然数)的形式,因此希腊人的发现也就是说明了单位正方形对角线的长度是不能用人们所认识的数(有理数)来表示的.这个事实完全与人的现实经验相悖.这种量与数相脱节的事实,曾在很长的时期里使得人们大惑不解,这个困惑也就是所谓的“第一次数学危机”.后来人们就把这种与1不可公度的、不可理喻的量,统称为无理数.因此是古希腊人发现了第一个无理数.后来人们还发现了,圆周长与直径的比率(圆周率 π)竟也是一个无理数!到了十九世纪德国数学家康托(Cantor G)证明了,比起有理数来,无理数多得“不可胜数”,它构成了被称之为“实数”的数系的绝对主体.

那么,无理数的出现,说明着什么呢?从认识论上来看,人们在现实生活里,大脑对外部物质世界的反映产生出经验思维.但人类在进入到了文明时代以后,就开始有了抽象的理性思维.这里的理性思维,主要是指在众多的事物中提出其共性的归纳思维和运用逻辑手段的演绎思维.人的抽象的理性思维,为自己开创了一个在现实的物质世界以外的理性的精神世界.这个理性世界,虽然源于现实世界,但却不等同于它.例如数学中没有宽度的线,没有厚度的面,或没有时间间隔的瞬时速度等,都只是理性的概念,在现实中是不可能有的.上文所谓的不可公度性,事实上也是一种理性概念.因为在现实生活中,人们只能在一定精度范围内进行度量,不存在什么绝对的精确性,而所谓不可公度,必须在有绝对精确度的前提下才得以产生.因此它是一种理性的、观念性的事物,而不是现实的东西.这说明人自己创造的理性精神世界中的实在,与自然的现实世界中的实在是不可混同的.现在再回过头来说无理数和实数.当今初中的数学课本,就告知了我们,所谓实数,乃是有理数和无理数的统称;而所谓无理数,乃是“无穷位的不循环小数”.从这个简述,人们即可看出,无理数不是现实世界里的一种实在,因为人不可能去数尽这有“无穷位”的不循环小数,更不能去完全地表示它了.因此它只是一种观念性的东西,是一种理性世界中的实在.古希腊人第一次揭示了理性世界与现实世界之间的矛盾,他们的发现说明了现实世界中的计量语言——有理数,不足以去表现理性世界中的量.那么,有理数究竟缺乏了什么,才使得它不足以成为人的理性世界中的计量语言呢?此外既然说无理数是一种观念性的东西,那么界定无理数的究竟是些什么“观念”呢?实数既然被认为是理性的实在,那么我们又如何构造出它们,这“构造”又是什么意思呢?

数的连续性和完备性 在现实应用中已发展得很完善的有理数,却缺少了一种被数学家称之为“连续性”(或“完备性”)的属性.连续性是一种抽象的理性性质,在现实中是不好被感受到的.用直观语言粗略地说,所谓数的连续性,也就是数的无隙性.一个数集 S ,将它的数按大小顺序排列到数轴上,若它排列得足够严实,使得数轴上不出现“隙点”,即数轴上每一个点都对应着 S 的一个数,则就称数集 S 是“连续”的,现在据此来考察一下有理数集.我们知道有理数是稠密的,任何两个有理数之间必有第三个有理数,它们无限密集地紧布在数轴各处.从直觉上来看,它理应是“连续”的.然而二千五百年前的希腊人,第一个指出了后来被称为 $\sqrt{2}$ 的隙点,这说明了有理数是不“连续”的.当然,数的连续性是一种高度理性化的数学概念,如上的浅喻说明只是作为一种理解问题的直观导引,不能作为逻辑演绎的依据.下面介绍在数学中是如何用严格的语言来定义数的连续性,并据此来判定有理数的不连续性,以及构造出实数.这里介绍的思想主要是由十九世纪德国数学家戴德金(Dedekind J W R)所给出的.

定义1 设 A, B 是有序的数集 S 的两子集,若满足

- (i) $A \neq \emptyset, B \neq \emptyset$;
- (ii) $A \cup B = S$;
- (iii) 对于任意 $x \in A$ 及 $y \in B$,有 $x < y$,

则称集偶 A, B 为数集 S 的一个分割,记为 (A, B) ,其中 A 称为分割的下集, B 称为分割的上集.

由定义可知,所谓数集 S 的分割,就是将 S 截为上、下两个真子集的分法,其中分割下集中的任何数均为上集的下界,上集中的任何数均为下集的上界.

例1 (i) 令 Q 表示有理数集, $A = \{x \in Q \mid x \leq 2\}$, $B = \{x \in Q \mid x > 2\}$,则显然 (A, B) 是 Q 的一个分割.

(ii) 令 Q^+ 表示正有理数集, $A = \{x \in Q^+ \mid x^2 < 2\}$, $B = \{x \in Q^+ \mid x^2 > 2\}$.同样易于验证, (A, B) 是 Q^+ 的一个分割.

定义2 设 S 是有序数集,若它的任一分割 (A, B) 都具有性质:或下集 A 有最大值,上集 B 无最小值;或下集 A 无最大值,上集 B 有最小值,这二者居一且仅居其一,则数集 S 称为是连续的.

用数集的分割来定义它的连续性,这是戴德金的实数连续统理论的核心方法.定义2所表述的严格数学语言,我们该如何去理解?我们把数集 S 的一个分割,譬喻成好像一把锋利的刀,把数轴一砍为二,若 S 是连续的,则刀刃必须在 S 的一个点上,这个点若归在分割的下集,就是下集的最大值点;若归在分割的上集,就是上集的最小值点.反之若分割的界点是 S 的“隙点”,情形就不是这样了.按照定义,考察有理数集,我们即可有

定理1 有理数集是不连续的.

为了证明定理,我们只须举出一个不满足定义2条件的有理数分割就行了,这就是例1(ii)中所列的分割.读者可以发现,这是一个以隙点 $\sqrt{2}$ 为界点的分割,对这个分割而言,读者不难自行证明,其下集无最大值,其上集无最小值.

至此人们会问:我们为什么需要提出数的连续性概念,它的作用在哪里呢?为了更明白地回答这个问题,这里我们须先介绍另一个概念——数的完备性.

定义3 设 $\{x_n\} (n=1, 2, \dots)$ 是一个数列.若对于任给的正数 ε ,都相应地可有自然数 N ,使得对于一切足码 m, n 超过 N 的数列中的数 x_m, x_n ,都有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$,则称 $\{x_n\}$ 是一个基本列(或柯西列).

由定义可见,一个基本列的数值之间的差值,随着足码的增加而无限趋小,这表明了所谓基本列,乃是具有无限凝聚趋势的数列.显然可以想见,这样的数列,必然有一个无限趋近和凝结的“核”点.令数列所在的数集为 S ,于是若这个“核”是 S 中的一个数,则自然地它就是数列的极限值 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.但 S 若是不连续的,而数列的“核”正好是它的“隙点”所在,这时数列尽管是无限凝聚的,但在 S 中它仍然不是一个收敛列(不存在极限).这说明了基本列是否就是收敛列,取决于所在数集的“严实”性.

定义4 若数集 S 中的任何基本列都有极限,则 S 就称为是完备的.

从定义可知,数的完备性,事实上也是要求数的某种严实性.从上文的论述即可想见,具有完备性的数集是不能有“隙点”的,因而它须是连续的.反过来我们在数学上也可严格证明,具有连续性的数集,也必具有完备性^[1,2].因此数的完备性与连续性是等价的.

例2 令 $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (n=1, 2, \dots)$,则有

(i) $\{x_n\}$ 是有理数基本列(读者自行验证);

(ii) $\{x_n\}$ 在有理数域内不存在极限(参阅[2]).

根据上例和定义4,即可有

定理2 有理数集是不完备的.

一个作为科学语言和计量手段的数域,像有理数域那样,若不具有完备性,就形成了很严重的问题.因为不完备性,就是基本列可以无极限,这意味着这个数域对极限演算是不封闭的,因而在其上就不能建立严格的极限理论.而严格的极限理论,正是现代微积分学的灵魂,它使得微积分从一种以几何与运动的直观作为导引与论理依据的物算技术,上升为一种严密的高度理性化的科学,成为了当代科学的无可争辩的基础.具体地说,大家知道,现代微积分学中几乎一切基本概念,如初等函数、函数的连续性、函数的导数、微分、各种积分、无穷级数、傅氏分析……等等,无不都是建立在严格极限概念基础上,用极限来进行严格的定义的.然而所有这一切,均必须要以所在数域的完备性为前提.早期的微积分,由于建立在不具备完备性的有理数域上,从一开始就没有坚实的逻辑基础.到了十八世纪,由于论理上的紊乱与自相矛盾,被人发难,造成了震撼学术界的“第二次数学危机”.这次危机,虽然源自微积分,但它与源出无理数的第一次数学危机,事实上是一脉相承的.

那么,我们去哪里寻找一个具有连续性的数系呢?

实数的构造 微积分学,它的思想和方法代表着人的理性智慧的最高成就.然而它的发展进程中,却遇到了不可逾越而又必须逾越的障碍——它要求自己所在的论域具有连续性,而有理数域并不具有这种属性.于是构造实数连续统的问题,就历史地落到了后人的头上.但实数的产生,与自然数和有理数的自然生成是实质上不相同的,它不是“上帝给的”,而是人类通过自己优秀的代表人物,集中了人的

抽象理性智慧的大成所造就的一项伟大工程。

十九世纪后半叶,以微积分为主体的现代数学,已经有了二百多年的积累,在思想上和方法上具备了建造数学上严格逻辑基础的条件。于是这项历史性工程,终于在许多数学家的关注下,得以最终完成。这里应当特别提到的是德国数学家戴德金与康托(Cantor G)的工作,他们独立地以不同的理论形式构造了互相同构(从而也是等价)的实数。

下面我们来谈谈实数究竟是什么?它是用什么“原料”,又是如何“构造”的?前面已云,实数乃是一种观念性的东西,因此它须是由若干观念条件所界定的理性元素。这些观念条件在数学上要用明确的可检验的语言表述出来,我们常称之为公理,它代表着实数应当具备的各种性质。因此所谓实数,乃是指由一组公理所界定的理性元素。于是“构造”出实数,就首先必须指明界定实数的公理组。除此以外,我们尚须证明,上述公理组所界定的元素是一种理性的“实在”,它们不是虚幻,这就是说所述公理在逻辑上是相容的、不矛盾的,从而它们所界定的元素是逻辑上合理的。举一个简单例子,如由不等式 $x^2 + 1 < 0$ 所界定的元素不可能是一种“实在”,因为界定它的两个出发点(“ $x^2 + 1$ ”和“ < 0 ”)所界定的元素不可能是一种“实在”,因为界定它的两个出发点(“ $x^2 + 1$ ”和“ < 0 ”)在逻辑上是相悖的。

下面先对界定实数的公理组作一概述。

由于理性思维是源于现实的,是现实思维的升华提高。因此实数并不是撇开有理数另起炉灶,它应是有理数基础上的继承发展,应当秉承有理数的一切构造性质,换句话说就是它满足界定有理数的一切公理(有理数公理)。此外,它还必须具有有理数不具备的连续性(或完备性),综合起来它应满足下述的两组公理。

A. 有理数公理 其内容概述如下:

- (i) 顺序公理. 它表明数集合具有顺序结构;
- (ii) 域公理. 它表明数集合具有加、乘运算的代数结构,并且在加、乘及其逆运算下封闭(构成域)。
- (iii) 距离公理. 它表明数集合具有度量结构。

B. 连续性公理(或完备性公理)(见定义2、4)

所谓的实数,就是上述公理组A、B所界定的理性元素。如上所云,为了证明实数的“实在”性,我们须先证明上述公理组的相容性,即它们不是自悖的。

因为自然数是“上帝给的”,而有理数乃是自然数的自然衍生,实质上也是“上帝给的”,而界定有理数的公理组A,乃是人从有理数的性质中总结提炼出来的,并不是人自己的发明,而且它已经经历了千百年实践的检验,因而自然是相容的,无须再作什么证明。然而实数的连续性公理B,就不是如此了,它是人的理性的产物,是否在逻辑上相容于“上帝给的”公理组A,这正是需要严加证明的。诚然,要在逻辑上去抽象地证明这个相容性论断,将是十分困难的。然而我们可以有一个简单而易行的方法,那就是去找一种“实在”的理性元素对象,它们可以从代数上表示出来,然后再论证它们既满足公理组A,又满足公理B。这样我们既证明了公理组A、B的相容性(因为若不相容就不会存在这种元素),并且所给出的理性元素本身,就是所求的由公理组所界定的实数了。

上文所述就是实数构造的思想和方法的轮廓,这里最关键的步骤是给出一种代数上可表示的形式作为适应公理的理性元素,于是这种元素选择的形式不同,就出现形式不同的实数。下文我们将主要介绍两种形式的实数——戴德金实数和康托实数。

定义5(戴德金) 有理数的分割称为实数。

定义事实上表明了,戴德金是以“有理数分割”作为上面所云的理性元素的。然而囿于现实的生活经验,许多人对定义大惑不解。所谓分割,是指一种动作,或一种行为结果,怎么会成为了“数”呢?这是实数理解上很大的认识障碍。实际上,实数不是有形体的实物,它只是虚的观念性的东西。我们在说一个数,事实上我们只是在说一种用一定形式符号表征的性质而已,因此不能用平常视实物的眼光来看待数。实数是什么?实数就是界定它的抽象数学公理,别无任何其它。定义所表述的有理数分割,只是这组抽象公理可以在逻辑上实现的一种代数形式。诚然,它尚可以有实现的其他代数形式(如下文所述康托实数)。关键的问题是我们首先需要从逻辑上证明这组抽象公理所界定的元素的实在性,只要它们在理性上是实在的,那么它们的表征形式就是无足轻重的,我们可以用简单的文字符号,如 $\alpha, \beta, \pi, e, \sqrt{2}$..等

等来表示.

现在反过来考察定义5. 定义所给出的有理数分割, 或有理数集偶 (A, B) , 是一种确定的代数形式, 由于它是由有理数产生的, 因而是一种实在的对象. 然而这种代数形式本身并没有构造性质, 它并不天然就满足公理组 A, B, 因此并不就等于实数. 为了要使得有理数分割成为实数, 我们第一步先要赋予它以有理数的所有构造性质, 使它满足公理组 A. 当然要对有理数分割这种代数形式实施如上的“赋予”以及在逻辑上证明这种“可赋予”性, 我们需要作许多理论上的论证工作. 经过必要的步骤, 有理数分割或集偶 (A, B) 的集合已经是一个与有理数有同样构造性质的数域, 于是第二步我们证明这个数域本身即具有连续性, 即满足公理 B, 从而就完成了全部的实数构造工程.

今兹将具体论述步骤概述如下:

- (i) 在有理数分割即集偶 (A, B) 的集上定义一种顺序, 并证明其满足顺序公理;
- (ii) 在有理数分割集上定义加、乘运算, 并证明它们满足域公理;
- (iii) 在有理数分割集上定义距离, 并证明它满足度量公理.

这样我们就赋予了以有理数分割为元素的集合以有理数的所有构造性质, 即满足公理组 A. 第二步我们尚可证明, 所赋予实数的构造性质 (i), (ii), (iii) 同有理数一样, 是相容的. 例如实数在运算下仍保持顺序性等. 下面我们把一切满足定义2条件的有理数分割称为有理实数 (如例1(i)), 并且证明有理实数集与有理数集保序保距同构, 从而证明实数集是有理数集的扩展^[2], 在此基础上, 即可证明

定理3 戴德金实数是连续的.

定理说明戴德金实数同时满足公理 B, 这样我们就完成了戴德金形式下的实数构造.

下文我们将介绍另一种形式下构造的实数——康托实数. 戴德金的实数, 由于具有几何直观性, 似较易被人接受, 但也更易被人误解. 而最大的问题, 是戴德金分割的方法, 只适用于一维、有序的数集, 没有普遍性. 而康托实数所提供的完备化方法, 可以应用于任何维数的欧氏空间和一般的尺度空间, 具有很大的普遍性. 此外从严格的数学逻辑论证上来看, 笔者认为戴德金实数事实上是更不容易的. 因此康托实数从数学理论的角度上看, 是有更重要意义的.

为了构造康托实数, 我们先在前面界定实数的公理组中, 将公理 B 要求的数的连续性改换成数的完备性, 由此可见康托实数是根据完备性的要求来构造的.

定义6 设 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 是两个有理数的基本列, 若满足 $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$, 则它们称为是等价的.

例3 令

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!}, \quad y_n = \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \quad (n=1, 2, \dots),$$

则 $\{x_n\}, \{y_n\}$ 是有理数基本列, 而且它们是等价的 (读者可自行验证之).

根据定义6, 不难验证所定义的等价性满足等价关系公理^[2], 因此互相等价的所有有理数基本列构成一个等价类.

定义7(康托) 有理数基本列称为实数, 其中等价的有理数基本列代表同一实数.

据定义6可知, 事实上上述定义是把有理数基本列的等价类定义为实数的. 由定义即可知, 康托正是把有理数基本列当作为被公理组所界定的“理性元素”的 (见前面论述). 同样由于基本列是有理数构造的, 因此它也是“实在”的. 下文论述与上文类同, 我们首先赋予有理数基本列以有理数具有的构造性质 (公理组 A), 即

- (i) 在有理数基本列的集合上定义一种满足顺序公理的顺序关系;
- (ii) 在有理数基本列上定义满足域公理的加、乘运算;
- (iii) 在有理数基本列之间定义一种满足度量公理的距离.

在此基础上我们再证明结构性性质 (i), (ii), (iii) 的相容性. 这样有理数基本列的集合就成了一个具有有序结构、代数结构、与度量结构的数域——实数域. 下面称有极限 (在有理数域内有极限) 的有理数基本列为有理实数. 令有理实数与它的有理数极限值之间作一一对应, 得到了有理实数与有理数之间的一个自然同构, 这就证明了实数域是有理数域的一个扩展^[2]. 在上面论述的基础上, 我们即可证明

定理4 康托实数是完备的.

至此我们介绍了康托实数构造的全部思想与方法步骤,其严密的数学论述读者可参阅[1,2].

康托实数域既然是完备的,因此在其上的任何基本列都有极限.假设 $\{x_n\}$ 是有理数基本列,它在有理数域内无极限,记它所代表的康托实数为 α .现把 $\{x_n\}$ 放到实数域里考察,即 x_n 都对应为有理实数,则它仍是一个基本列,因此必有极限.有意思的是我们有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$!这就是说在实数域里面,一个有理数基本列的极限就是它“自己”.这也使我们回忆起前面曾提到,无理数是“无穷位不循环小数”,这正是在说无理数是康托实数.事实上,若令 x_n 表示这无穷位小数中的前 n 位截断小数,于是 $\{x_n\}$ 是有理数基本列,它所代表的实数记为 α .显然有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \alpha$.再作为例子,我们回顾2,3中所示的基本列 $\left\{ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \right\}$, $\left\{ \left(\frac{n+1}{n} \right)^n \right\}$,它们都表示一个实数.因为它们是等价的,因此所表示的是同一实数,这个实数就是自然对数的底 e ,是微积分学中一个最重要的常数.至此我们自然会联想到极限式 $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} = e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n} \right)^n$.这对于学过微积分的读者而言,是很熟悉的了.

如上所论述,我们已介绍了戴德金和康托两种形式下的实数构造,我们还可以作出其他形式的实数,在数学上由于它们是等价的.于是我们可以统称它们为实数,不再作任何区分.

实数连续性定理的各种等价表述 实数的构造成功,立即成了微积分学坚实的逻辑基础.它不仅使得分析数学成为高度严密的公理化的科学,而且带动了整个现代抽象数学的发展.实数连续性定理由于太重要了,因而在应用中出现了许多不同的表述形式.下面兹介绍其中常见的五种(定理3-7).

定理3(实数连续性定理) 设 (A, B) 为实数集的任一分割,则或下集 A 有最大数,上集 B 无最小数;或下集 A 无最大数,上集 B 有最小数,二者居其一且仅居其一.

定理4(完备性定理,柯西准则) 一个实数列有极限的充要条件是它是基本列.

定理5(单调有界判定定理) 一个单调上升有上界(或单调下降有下界)的实数列必有极限.

定理6(确界定理) 有上(下)界的实数集必有上(下)确界.

定理7(区间套定理) 设 $[a_n, b_n] (n=1, 2, \dots)$ 是实数域上一个闭区间序列,若满足

(i) $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n] (n=1, 2, \dots)$;

(ii) $\lim_{n \rightarrow \infty} (b_n - a_n) = 0$,

则存在唯一的实数 α ,使 $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{\alpha\}$.

上述五个定理,均应用在不同形式的问题之中,读者在学习数学分析的原理时,自能体会.实数除了具有连续性和完备性之外,在拓扑上还具有列紧性与紧性(分别见下述定理8、定理9),它们是与连续性、完备性不同的拓扑性质,然而在一维的实数情形,它们却蕴含于完备性之中.反之,从它们出发,也可以推证出完备性.因此对于实数而言,它们都互为充分必要条件.我们在论述数学分析的基本原理时,也同样要经常引用它们.

定理8(Balzano-Weierstrass) 实数的任何有界的无限集,必可抽取出收敛序列.

定义8 令 Σ 是一个开区间组成的集合, S 是一个数集合.若对于任一 $x \in S$,均可有开区间 $\Delta \in \Sigma$,使得 $x \in \Delta$,则称 Σ 是 S 的一个覆盖,若 Σ 仅包含有限个开区间,则称 Σ 是 S 的有限覆盖.

定理9(Heine-Borel) 设 S 是一个有界闭的实数集, Σ 是它的一个覆盖,则必可在 Σ 中抽取出 S 的有限子覆盖.

[参 考 文 献]

- [1] 曹之江,王刚.微积分学简明教程(上)(第二版)[M].北京:高等教育出版社,2004.5.
- [2] 曹之江.数学分析基础原理[M].呼和浩特:内蒙古大学出版社,2004.2.