

## 谭老师谈高考——

## 2007年数学高考考点分析(一)

## ——集合、常用逻辑用语、函数概念与基本初等函数 I

广州市教育局教研室 (510030) 谭国华

## 一、集合

集合是中学数学最基本的概念之一.在2007年高考数学考试大纲(以下简称07考纲)中,对集合的考查要求与过去大致相同.但07考纲更强调将集合作为一种语言,要求考生“能用自然语言、图形语言、集合语言(列举法或描述法)描述不同的具体问题”.

根据07考纲的要求和往年高考对集合的考查情况,高考对集合的考查方式大致有两种:一种是直接对集合的有关知识进行考查,范围涉及集合的含义与表示,包括元素与集合的“属于”关系、列举法、描述法、韦恩图法;集合间的基本关系,包括包含和相等关系、子集、空集、全集等概念;集合的基本运算,包括集合的交、并、补运算以及交集、并集、补集等概念.重点是集合的交、并、补运算.这类试题基本上属于送分题,难度不大,且以选择题和填空题为主.另一种是集合与其他数学知识的结合,如集合与函数、不等式的结合.在这类试题中,往往是将集合作为工具考查集合语言与集合思想的运用.(以下举例限于篇幅,有些略去解法.)

例1[HTSS][2004年高考数学全国卷I理科第6题] 设A、B、I均为非空集合,且满足 $A \subseteq B \subseteq I$ ,则下列各式中错误的是(A)  $(C_I A) \cup B = I$ ; (B)  $(C_I A) \cup (C_I B) = I$ ; (C)  $A \cap (C_I B) = \emptyset$ ; (D)  $(C_I A) \cap (C_I B) = C_I B$ . (答案:(B).)

说明:高考对集合基本运算的考查,有时会给出具体的集合,此类试题往往难度不大,属于送分题.但有时并不给出具体的集合(如本题),往往较为抽象,有一定的难度.解答此类抽象集合的试题最好是借助韦恩图,只要图形画对了,答案也就基本出来了.

例2[2006年高考数学江西卷理科第1题] 已知集合 $M = \left\{x \mid \frac{x}{(x-1)^3} \geq 0\right\}$ ,  $N = \{y \mid y = 3x^2 + 1, x \in \mathbf{R}\}$ ,则 $M \cap N$ 等于(A)  $\emptyset$ ; (B)  $\{x \mid x \geq 1\}$ ; (C)  $\{x \mid x > 1\}$ ; (D)  $\{x \mid x \geq 1 \text{ 或 } x < 0\}$ . (答案:(C).)

说明:本题突出考查了对集合语言的理解.解决本

题先要考虑元素所具有的形式及其意义,然后是要考虑元素所具有的属性.

例3[2004年高考数学上海卷理科第19题] 记 $f(x) = \sqrt{2 - \frac{x+3}{x+1}}$ 函数的定义域为A,  $g(x) = \lg[(x-a-1)(2a-x)](a < 1)$ 的定义域为B. (I)求A; (II)若 $B \subseteq A$ ,求实数a的取值范围. (答案:A =  $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ ;  $a \in (-\infty, -2] \cup [1/2, 1)$ ).

说明:本题是一道集合、函数、不等式的综合题,主要考查了对集合语言的理解和函数定义域的求法.

## 二、常用逻辑用语

在过去的考纲中,与本部分相应的叫简易逻辑.将07考纲与之比较可发现,过去的简易逻辑和现在的常用逻辑用语既有联系又有区别.联系是,两者在内容上都包含了四种命题及其关系,充要条件,简单的逻辑联结词“或”、“且”、“非”.区别是,在内容上,常用逻辑用语增加了全称量词和存在量词;在考查要求上,简易逻辑要求理解逻辑联结词“或”、“且”、“非”的含义,理解四种命题及其相互关系,掌握充要条件的意义,而常用逻辑用语将充要条件降为“理解”级,其他的降为“了解”级.另外,两者名称的不同还隐含着两者在教学定位上的不同,简易逻辑是基于数学意义上的简易数理逻辑,而常用逻辑用语只是要求学生学会利用一些常用的逻辑用语准确地表达数学内容,体会逻辑用语在表述和论证中的作用,从而更好地进行交流.

从高考的角度来看,现在的常用逻辑用语除了因增加全称量词和存在量词而导致命题内容上有所变化外,在考查要求上将和过去的简易逻辑大致相同.这是因为,过去的高考对简易逻辑的考查要求其实就不高.题型大多为选择题和填空题,考查的重点是命题真假的判断和充要条件.当然,在增加全称量词和存在量词后,也许会影响某些试题的表达方式,从而增加阅读理解上的难度.

例4[2005年高考数学福建卷理科第4题] 已知直线m、n与平面 $\alpha$ 、 $\beta$ ,给出下列三个命题:①若 $m \parallel \alpha, n \parallel \alpha$ ,则 $m \parallel n$ ;②若 $m \parallel \alpha, n \perp \alpha$ ,则 $n \perp m$ ;③若 $m \perp \alpha, m \parallel \beta$ ,则 $\alpha \perp \beta$ .其中真命题的个数是

(A)0;(B)1;(C)2;(D)3.

解:命题②③为真命题,选(C).

说明:本题将对命题真假的判断和对空间线面位置关系的考查相结合.在立体几何试题中经常会出现类似的试题,还有一类经常出现的对命题真假判断的试题,即所给出的几个命题分属不同的数学分支,这种命题方式可以增大试卷的知识覆盖率.

例5[2005年高考数学福建卷文科第8题] 已知  $p: a \neq 0, q: ab \neq 0$ , 则  $p$  是  $q$  的(A)充分不必要条件;(B)必要不充分条件;(C)充要条件;(D)既不充分也不必要条件.

解:由  $q: ab \neq 0$  可推出  $p: a \neq 0$ ;反之,由  $p$  推不出  $q$ . 故选(B).

说明:充要条件的判断是历年高考重点考查的对象之一,判断的方法有定义判断法和集合判断法两种.

例6[2004年高考数学福建卷理科第3题] 命题  $p$ : 若  $a, b \in \mathbf{R}$ , 则  $|a| + |b| > 1$  是  $|a + b| > 1$  的充分而不必要条件;命题  $q$ : 函数  $y = \sqrt{|x-1|} - 2$  的定义域是  $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$ . 则(A)" $p$ 或 $q$ "为假;(B)" $p$ 且 $q$ "为真;(C) $p$ 真 $q$ 假;(D) $p$ 假 $q$ 真. (答案:(D).)

说明:本题涉及的不等式在07考纲中属于理科选考内容,而且在07年广东卷中有可能以填空题的形式出现(待广东省考试说明正式颁布后才能正式确定). 本题中还出现了复合命题" $p$ 或 $q$ "和" $p$ 且 $q$ "真假的判断问题,因其涉及真值表,从课程标准将"简易逻辑"改称为"常用逻辑用语"的含义来说,这种类型的问题将不会在新课程标准高考试题中出现,但象这类模糊性问题又确实是可以有不同看法的,因此,在复习备考中略为涉及也不为过.

例7 下列命题:①  $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 2 > 0$ ; ②  $\forall x \in \mathbf{N}, x^4 \geq 1$ ; ③  $\exists x \in \mathbf{Z}, x^3 < 1$ ; ④  $\exists x \in \mathbf{Q}, x^2 = 3$ . 其中正确命题的个数为( ) (A)1个;(B)2个;(C)3个;(D)4个. (答案:正确的命题为①③,选(B).)

例8[2006年高考数学广东卷第20题]  $A$ 是由定义在  $[2, 4]$  上且满足如下条件的函数  $\varphi(x)$  组成的集合:①对任意的  $x \in [1, 2]$ , 都有  $\varphi(2x) \in (1, 2)$ ; ②存在常数  $L(0 < L < 1)$ , 使得对任意的  $x_1, x_2 \in [1, 2]$ , 都有  $|\varphi(2x_1) - \varphi(2x_2)| \leq L|x_1 - x_2|$ . (I) 设  $\varphi(x) = \sqrt[3]{1+x}, x \in [2, 4]$ , 证明:  $\varphi(x) \in A$ ; (II) 设  $\varphi(x) \in A$ , 如果存在  $x_0 \in (1, 2)$ , 使得  $x_0 = \varphi(2x_0)$ , 那么这样的  $x_0$  是唯一的; (III)  $\varphi(x) \in A$ , 任取  $x_1 \in (1, 2)$ , 令  $x_{n+1} = \varphi(2x_n), n = 1, 2, \dots$ . 证明: 给定正整数  $k$ , 对任意的正整数  $p$ , 成立不等式  $|x_{k+p} - x_k| \leq \frac{L^k - 1}{1 - L} |x_2 - x_1|$ .

说明:例7和例8是笔者对高考考查全称量词和存在量词的命题方式的估计.一种是单独考查,而且是以客观题的形式出现;另一种是作为常用的逻辑用语在其他试题中出现,起到简洁、准确表达数学内容的作用,例8可以作为这方面的典型代表.

### 三、函数概念与基本初等函数 I

#### 1. 高考要点

函数概念与基本初等函数 I 包括函数的概念,函数的图象与性质,指数函数、对数函数和幂函数,函数与方程,函数模型及其应用等内容.

这部分内容既是高中数学的主干知识、经典内容,也是学习高等数学的重要基础,因此,这部分内容成为历年高考重点考查的对象.在题型方面,不仅有选择题、填空题,而且更多的是以解答题的形式呈现.在难度方面,容易、中等、难题都有.在综合程度方面,不仅有函数本身相关知识的综合,如函数的概念、图象、性质等的综合,而且常常是函数与其他数学知识的综合,如函数与导数、方程、数列、不等式、解析几何等的综合.这些特点估计在07年高考中仍然会得到体现.

#### 2. 考纲对比

比较07考纲和过去的考纲,可以发现有以下几点变化: (1)07考纲将分段函数单独列出,要求"了解简单的分段函数,并能简单应用".这应引起重视. (2)反函数在过去的高考中几乎每年必考,但07考纲只要求了解指数函数  $y = a^x$  与对数函数  $y = \log_a x (a > 0, a \neq 1)$  互为反函数即可,因而要求大为降低. (3)幂函数曾一度从考纲中删去,但07考纲又将其列为考查内容. (4)指数函数、对数函数以及幂函数增长差异的比较,已有很多年未列为高考考查的内容,但已列进07考纲.如果要考的话,估计以客观题的形式出现的可能性较大. (5)07考纲新增"函数与方程"考点,要求"①结合二次函数的图象,了解函数的零点与方程根的联系,判断一元二次方程根的存在性及根的个数;②根据具体函数的图象,能够用二分法求相应方程的近似解".

#### 3. 考点分析

分六部分对函数的一些考点进行具体的分析:

(1) 函数的概念 高考对该知识点的考查往往是与其它内容如单调性、奇偶性、最大(小)值及应用题等结合进行的. 重点要求:①对函数记号(如  $f(x)$ )的理解;②会求简单函数的定义域、值域;③与其它内容结合求函数的解析式;④函数与方程的思想.

例9[2006年高考数学广东卷第1题] 函数  $f(x) = \frac{3x^2}{\sqrt{1-x}} + \lg(3x-1)$  的定义域是(A)  $(-\frac{1}{3}, +\infty)$ ;

(B) $(-\frac{1}{3}, 1)$ ; (C) $(-\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ ; (D) $(-\infty, -\frac{1}{3})$ .

(答案:(B).)

说明:本轮高中课改要求削弱对函数定义域、值域的过于繁、难的训练,尤其是人为的过于技巧化的训练,目的是为了使学生更好地理解函数的基本思想和实质.但是,并没有说在高考中不考函数的定义域和值域问题.在07考纲中,仍然要求“会求一些简单函数的定义域和值域”.因此,让学生掌握一些基本函数定义域和值域的求法是非常必要的.

例10[2005年高考数学山东卷理科第6题] 函数  $f(x) = \begin{cases} \sin(\pi x^2), & -1 < x < 0, \\ e^{x-1}, & x \geq 0. \end{cases}$  若  $f(1) + f(a) = 2$ , 则  $a$  的所有可能值为

(A)1; (B) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; (C)1,  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ ; (D)1,  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ . (答案:(C).)

说明:在07考纲中,分段函数的地位得以提高.在复习备考中应要求学生掌握一些简单分段函数的函数值、定义域、值域(包括最值)的求法,能正确地画出其图象,而且要知道分段函数问题要分段处理.

(2) 函数的性质 函数的性质主要是指:单调性、奇偶性、周期性、最大(小)值.

① 单调性:要求会用定义法或导数法判断或证明函数的单调性,会求一些简单函数(理科还应包括简单复合函数)的单调区间,会利用单调性比较大小、求函数的最值和解不等式等.请注意,关于函数单调性的定义,北师大版数学必修1教材和过去高中数学教材的定义,以及和新课标其他数学教材的定义有差异,这是高考命题时应妥善处理的问题之一.但由于现有中学数学的教辅读物基本上都是采用过去高中数学教材中的定义,笔者建议,复习时仍然采用过去的定义方式,也告知学生北师大版数学教材中的定义方式.

② 奇偶性:要求会用定义判断函数的奇偶性,知道一个函数是奇函数或偶函数的必要条件是其定义域在数轴上所对应的点集关于原点对称,会使用以下等价形式:  $f(-x) = -f(x) \Leftrightarrow f(x) + f(-x) = 0$ ;

$$f(-x) = f(x) \Leftrightarrow f(-x) - f(x) = 0.$$

在07考纲中,已降低函数奇偶性的考查要求,只要求“结合具体函数,了解函数奇偶性的含义”.但从高考备考的角度来看,在这个问题上适当提高一些要求还是有必要的.

③ 周期性:重点是对  $f(x+T) = f(x)$  ( $T \neq 0$ ) 的理解.在历年的考纲中,周期函数这一考点都是放在三角函数中的.但实际上,在每年的高考试题中涉及周期函数的试题往往不局限于三角函数,因此,在目前的复习备考中,还应将这一考点适当扩大到其他的一些函

数,包括抽象函数.

④ 最大(小)值:求最值的方法有很多,但从高考考查的情况来看,应重点掌握二次函数最值(特别是给定区间上的最值)的求法,利用判别式、均值定理、函数的单调性和导数求最值等.利用判别式法求最值要注意检验等号是否成立,利用均值定理求最值要满足“一正、二定、三相等”.

例11[2005年高考数学广东卷第19题] 设函数  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上满足  $f(2-x) = f(2+x)$ ,  $f(7-x) = f(7+x)$ , 且在闭区间  $[0, 7]$  上, 只有  $f(1) = f(3) = 0$ . (I) 试判断函数  $y = f(x)$  的奇偶性; (II) 试求方程  $f(x) = 0$  在闭区间  $[-2005, 2005]$  上的根的个数, 并证明你的结论. (答案: 函数  $y = f(x)$  是非奇非偶函数. 方程  $f(x) = 0$  在闭区间  $[-2005, 2005]$  上的根的个数是 802 个.)

说明:函数性质是高考热点之一.既有单一考查某个性质的浅题,也有综合性非常强的难题.如本题就综合考查了函数的奇偶性、周期性、对称性和方程根的分布问题,而且未给出具体的函数,抽象程度较高.抽象函数问题在历年考纲中都未明确要求,但却经常在高考试题中出现,这在07年仍然要加以注意.

### (3) 函数的图象

函数的图象是函数关系的一种表示形式,它反映了从“图形”方面刻画函数的变化规律.高考对函数图象的考查,一种方式是直接考查某个(或某几个)函数的图象,另一种方式是在考查其它内容时,需使用数形结合思想,画出函数的图象.由此要求对一些基本函数如反比例函数、一次函数、二次函数、幂、指、对数函数的图象,以及增函数、减函数、偶函数、奇函数的图象特征非常熟悉.另外,还要熟悉一些基本的图象变换如平移变换、伸缩变换、对称变换等.

例12[2005年高考数学广东卷第9题] 在同一平面直角坐标系中,函数  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  的图象关于直线  $y = x$  对称.现将  $y = g(x)$  的图象沿  $x$  轴向左平移2个单位,再沿  $y$  轴向上平移1个单位,所得的图象是由两条线段组成的折线(如图1所示),则函数  $f(x)$  的表达式为( )

- (A)  $f(x) = \begin{cases} 2x+2, & -1 \leq x \leq 0, \\ (x/2)+2, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$   
 (B)  $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & -1 \leq x \leq 0, \\ (x/2)-2, & 0 < x \leq 2; \end{cases}$   
 (C)  $f(x) = \begin{cases} 2x-2, & 1 \leq x \leq 2, \\ (x/2)+1, & 2 < x \leq 4; \end{cases}$   
 (D)  $f(x) = \begin{cases} 2x-6, & 1 \leq x \leq 2, \\ (x/2)-3, & 2 < x \leq 4. \end{cases}$

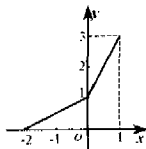


图1

解:将图象沿  $y$  轴向下平移 1 个单位,再沿轴向右平移 2 个单位得图 2,从而可以得到  $g(x)$  的图象,故  $g(x) = \begin{cases} (x/2) - 1, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2x - 4, & 2 < x \leq 3. \end{cases}$  函数  $y = f(x)$  和  $y = g(x)$  的图象关于直线  $y = x$  对称,

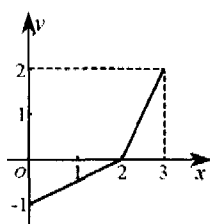


图 2

$$\therefore f(x) = \begin{cases} 2x + 2, & -1 \leq x \leq 0, \\ (x/2) + 2, & 0 < x \leq 2. \end{cases} \text{ 故选(A).}$$

说明:本题主要考查分段函数、函数图象的平移与对称等基本知识,具有一定的综合性,但难度并不大.本题也可以利用特殊点检验获得答案.

(4) 幂函数、指数函数和对数函数 本部分涉及的内容有:① 幂的运算和对数运算;② 幂、指、对数函数的定义、图象与性质;③ 指数函数、对数函数以及幂函数增长差异的比较. 要求熟悉:① 幂和对数的运算法则,对数换底公式,指数式与对数式的互化;② 能借助幂、指、对数函数的图象灵活运用数形结合思想解题;③ 能运用幂、指、对数函数的单调性比较大小,在给定条件下求字母的取值范围以及求函数的最值等.

例 13[2006 年高考数学全国卷 I 第 2 题] 已知函数  $y = e^x$  的图象与函数  $y = f(x)$  的图象关于直线  $y = x$  对称,则(A)  $f(2x) = e^{2x} (x \in \mathbf{R})$ ; (B)  $f(2x) = \ln 2 \cdot \ln x (x > 0)$ ; (C)  $f(2x) = 2e^x (x \in \mathbf{R})$ ; (D)  $f(2x) = \ln x + \ln 2 (x > 0)$ . (答案:(D).)

说明:07 考纲只要求了解指数函数  $y = a^x$  与对数函数  $y = \log_a x$  互为反函数( $a > 0, a \neq 1$ ),对于其他函数的反函数问题不再作要求.

(5) 函数与方程 主要内容有:① 函数的零点与方程根的联系;② 一元二次方程根的存在性及根的个数;③ 方程的近似解.

例 14[2004 年高考数学重庆卷理科第 7 题] 一元二次方程  $ax^2 + 2x + 1 = 0 (a \neq 0)$  有一个正根和一个负根的充分不必要条件是(A)  $a < 0$ ; (B)  $a > 0$ ; (C)  $a < -1$ ; (D)  $a > 1$ . (答案:(C).)

说明:本题主要考查一元二次方程根的问题和充要条件等有关知识.二次函数和一元二次方程是中学数学中研究最为透彻的两个数学模型,高考对这两个问题的考查是全方位的.虽然一元二次方程根的存在性及根的个数在过去的高考试题中也经常出现,但并没有象现在这样明确在考纲中列出.

例 15[2004 年高考数学广东卷第 21 题] 设函数  $f(x) = x - \ln(x + m)$ ,其中常数  $m$  为整数.(I) 当  $m$  为何值时,  $f(x) \geq 0$ ; (II) 定理:若函数  $g(x)$  在  $[a, b]$

上连续,且  $g(a)$  与  $g(b)$  异号,则至少存在一点  $x_0 \in (a, b)$ ,使  $g(x_0) = 0$ .试用上述定理证明:当整数  $m > 1$  时,方程  $f(x) = 0$  在  $[e^{-m} - m, e^{2m} - m]$  内有两个实根.

说明:本题第(II)问考查了函数零点与方程的根等有关知识,所给出的定理实际上就是现在课程标准实验教材上的函数零点性质定理.只不过课程标准删去了“函数的连续性”,因而应将定理中“函数  $g(x)$  在  $[a, b]$  上连续”改为“函数  $g(x)$  在  $[a, b]$  上的图象是一条连续不断的曲线”.

(6) 函数模型及其应用 函数模型(指数函数、对数函数、幂函数、分段函数等)的应用,从 07 年开始应特别加以关注.在过去三年的高考中,函数模型的应用被人为淡化,以至于使人以为高考应用题就是概率题,这是不正常的.随着新课程标准高考的到来,这种状况迟早会改变.

例 16[2000 年高考数学全国卷第 21 题] 某蔬菜基地种植西红柿,由历年市场行情得知,从二月一日起的 300 天内,西红柿市场售价与上市时间的关系用图 3 的一条折线表示;西红柿的种植成本与上市时间的关系用图 4 的抛物线段表示.(I) 写出图 3 表示的市场售价与时间的函数关系式  $P = f(t)$ ; (II) 认定市场售价减去种植成本为纯收益,问何时上市西红柿纯收益最大?(注:市场售价和种植成本的单位:元/ $10^2 \text{ kg}$ ,时间单位:天).

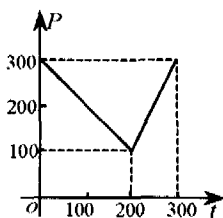


图 3

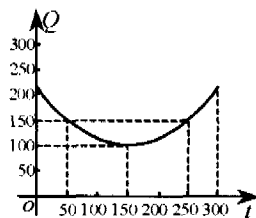


图 4

解:(I) 由图 3 可得市场售价与时间的函数关系为  $f(x) = \begin{cases} 300 - t, & 0 \leq t \leq 200, \\ 2t - 300, & 200 < t \leq 300; \end{cases}$  由图 4 可得种植

成本与时间的函数关系为  $g(t) = 0.005(t - 150)^2 + 100, 0 \leq t \leq 300$ . (II) 设  $t$  时刻的纯收益为  $h(t)$ ,则由题意得  $h(t) = f(t) - g(t)$ , 即  $h(t) = \begin{cases} -0.005t^2 + 0.5t + 87.5, & 0 \leq t \leq 200, \\ -0.005t^2 + 3.5t - 512.5, & 200 < t \leq 300. \end{cases}$  当  $0 \leq t \leq 200$  时,配方整理得  $h(t) = -0.005(t - 50)^2 + 100$ , 所以,当  $t = 50$  时,  $h(t)$  取得区间  $[0, 200]$  上的最大值 100; 当  $200 < t \leq 300$  时,配方整理得  $h(t) = -0.005(t - 350)^2 + 100$ , 故当  $t = 300$  时,  $h(t)$  取得区

# 华南师范大学 2007 级教育硕士研究生入学考试 “初等数学研究”试题与解答

华南师范大学数学科学学院 吴 康

本试题是 2006 年 10 月 21 ~ 22 日进行的在职攻读硕士学位全国联考专业课试题,用于华南师范大学 2007 级在职攻读教育硕士学位(学科教学·数学专业)研究生入学考试,时间为 3 小时,满分 100 分.考试参考书目为[1],[2].

## 试 题

### 一、(本大题满分 20 分,每小题 5 分)

1. 写出映射的定义和函数的定义.

2. 设  $A, B$  是实数集  $\mathbf{R}$  的非空子集,  $f: A \rightarrow B$  为函数. 试给出  $f$  的反函数的定义.

3. 设  $A = \mathbf{R}^+$  (正实数集),  $B = \mathbf{R}$ , 试求函数  $f: A \rightarrow B$ , 使得  $f(2^{x+1}) = 4x + 3, x \in A$ .

4. 上题的函数  $f$  是否有反函数? 如果没有, 说明理由; 如果有, 写出它的反函数的表示式.

### 二、(本大题满分 20 分, 每小题 5 分) 今有

**命题 1.** 设  $a, b, c, d$  为复常数,  $a \neq 0$ , 若  $x$  的三次方程  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  在复数范围内的全部 3 个根是  $x_1, x_2, x_3$ , 则

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= -\frac{b}{a}, x_2x_3 + x_1x_3 + x_1x_2 = \frac{c}{a}, \\ x_1x_2x_3 &= -\frac{d}{a}. \end{aligned}$$

1. 写出命题 1 的逆命题(记为**命题 2**)、否命题(记为**命题 3**)、逆否命题(记为**命题 4**).

2. 命题 1, 2, 3, 4 中有哪几个是正确的, 哪几个是不正确的? 对正确的命题(如果有的话)任选一个给出证明, 对不正确的命题(如果有的话)任选一个给出反例.

3. 写出命题 1 在  $n$  次方程( $n$  为正整数)时的推广(记为**命题 5**), 以及命题 5 的逆命题(记为**命题 6**). 命题 5 和命题 6 是否真命题(只须回答“是”或“否”).

4. 设  $x_1, x_2, x_3$  是  $x$  的三次方程  $x^3 + cx + d = 0$  (其中  $c, d$  为复常数) 在复数范围内的全部三个根, 求证:

$$\frac{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}{2} \cdot \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{3} = \frac{x_1^5 + x_2^5 + x_3^5}{5}.$$

**三、(本大题满分 30 分, 每小题 5 分)** 把复数  $a + bi$  ( $a, b \in \mathbf{R}$ ) 理解为实数的有序对  $(a, b)$ ,  $ab \in \mathbf{R}$ . 按复数集的含义来研究全体实数有序对的复合  $\Omega = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbf{R}\}$ .

1. 在  $\Omega$  中引入“相等”的定义, 再引入加、减法运算.

2. 在  $\Omega$  中引入乘、除法运算.

3. 说明  $\Omega$  有子集  $W$  与实数集  $\mathbf{R}$  一一对应, 并保持四则运算的对应关系, 从而可把  $\mathbf{R}$  视为  $W$ , 理解为  $\Omega$  的子集.

4. 说明  $(-1, 0)$  在  $\Omega$  中有平方根.

5. 简要地说明这样建立的代数系统  $\Omega$  就是复数集  $\mathbf{C}$ , 它关于以上定义的四则运算成为一个数域.

6. 举例说明在  $\Omega$  中引入全序关系是可能的, 但引入大小关系则会导致与已有的  $\mathbf{R}$  中的大小关系矛盾, 从而  $\Omega$  不适合引入大小关系.

间  $(200, 300]$  上的最大值 87.5. 综上, 由  $100 > 87.5$  可知,  $h(t)$  在区间  $[0, 300]$  上可以取得最大值 100, 此时  $t = 50$ . 即从二月一日开始的第 50 天, 上市的西红柿纯收益最大.

**说明:** 本题是一道比较典型的分段函数应用题.

**例 17** [2004 年高考数学重庆卷文科第 20 题] 某工厂生产某种产品, 已知该产品的月生产量  $x$  (吨) 与每吨产品的价格  $p$  (元/吨) 之间的关系式为:  $p = 24200 - \frac{1}{5}x^2$ , 且生产  $x$  吨的成本为  $R = 50000 + 200x$  (元). 问该厂每月生产多少吨产品才能使利润达到最大? 最大利

润是多少? (利润 = 收入 - 成本)

**解:** 设每月生产  $x$  吨时的利润为  $f(x)$  元, 则  $f(x) = (24200 - 0.2x^2)x - (50000 + 200x) = -0.2x^3 + 24000x - 50000$  ( $x \geq 0$ ). 由  $f'(x) = -0.6x^2 + 24000 = 0$ , 解得  $x_1 = 200, x_2 = -200$  (舍去). 因  $f(x)$  在  $[0, +\infty)$  内只有一个点  $x = 200$  使  $f'(x) = 0$ , 故它就是最大值点, 且最大值为:  $f(200) = -0.2(200)^3 + 24000 \times 200 - 50000 = 3150000$  (元). **答:** 每月生产 200 吨产品时利润达到最大, 最大利润为 315 万元.

**说明:** 函数与导数的综合及其在解决实际问题中的应用, 是新课程标准高考特别值得关注的问题之一.