

圆锥曲线复习课文献综述

方炜淇 赵萍

一、有关圆锥曲线复习课教学设计的研究现状

单铭成^[1]在“高中圆锥曲线离心率”的复习课中，以“低起点，小步子，炼方法”为原则，首先从四道直接或稍微变化就可运用离心率定义或公式解决的简单题出发，同时这四道题目的难度逐渐上升，使学生回顾解决离心率问题（求值或求取值范围）所需的基本知识，再基于焦点三角形设计四道例题，前三道例题条件不断一般化，从形状确定的等腰直角三角形到形状不确定的直角三角形；结论的一般性随之增加——从确定的离心率的值到不确定的离心率的取值范围，引导学生关注解决此类问题的通性通法——数形结合，利用几何条件和圆锥曲线的标准方程建立关于 a 、 b 、 c 的齐次方程或不等式，感悟灵活运用正弦定理、余弦定理、向量的知识以及圆锥曲线的范围和对称性、基本不等式等。最后随堂检测中的两道题跳出了基于焦点三角形的条件，让学生感受圆锥曲线离心率问题的多样性，提升思维的灵活性。

姚恒^[2]在圆锥曲线的一堂高三二轮复习课中，以课本中椭圆第一定义的证明入手，改变其中某一步做法得到椭圆的焦半径公式，借此类比拓展得到圆锥曲线的第一定义与焦半径公式。其次利用两道例题及其变形带领学生探究圆锥曲线的最值问题与定值问题，感悟圆锥曲线的基本内容与基本数学思想：数形结合、函数与方程、类比推理等。

卓斌^[3]在《圆锥曲线类型的判定》这一复习课中，首先利用一个开放性问题带领学生回顾判定圆锥曲线类型的两条途径——定义法、方程法。接着以题组的形式从苏教版高中数学选修 2-1 中一道习题的改编（问题 1）开始，系统地研究了动圆与两定圆相切问题以及与一个圆和一条定直线相切问题，充分利用三种圆锥曲线的第一定义，对轨迹的类型进行了判定与识别。而题组 2 是以利用圆锥曲线的方程判断曲线的类型为主题，选择教材中出现的两类问题：识别伸缩变换后所得曲线类型、探索满足一定条件的动点的轨迹类型。

余建国^[4]以一道有关椭圆的题目为背景，引导学生观察题目中“变”的元素和“不变”的元素并自行编题、解题。其次引导学生从其余角度再进行编题，以几何画板为手段搭建手脚架带领学生经历“发现——猜想——验证”的探究过程，使学生学会解决圆锥曲线的一类定值问题。

上述研究者对高三圆锥曲线复习课的教学设计均有以下特点：一是注重回归教材，或从课本的例题出发，或从课本的定义出发探究专题内容。二是注重变式训练，以某道题目为基础，坚持小步子原则，不断改变题目的条件，加深题目难度，涵盖专题全部内容，使学生在变式训练中不断提升思维的灵活性，学会解决

一类题。

笔者在知网上通过检索关键词“高三圆锥曲线复习课”，关于高三圆锥曲线复习课如何上或者课堂实录有较多的文章。其中较多研究者对于高三圆锥曲线专题复习课的教学处理仍采用以下基本模式：知识点梳理、基础训练、范例解读、巩固训练。同时对教学处理也存在一些问题，如例题与变式的设计与使用不够精当、突出；对学生思维的展示与引领不够充分、自然；忽视教材内容的运用与挖掘等。

二、关于高三圆锥曲线复习课教学建议的研究现状

李光裕^[5]首先指出高三小专题复习课存在的主要问题有：专题设置指向不够明确；过于追求学习容量与节奏；不注重合理组织有效学习活动，问题设计不够合理，就题论题。其次就这些问题提出两点建议：明确教学目标与精设教学内容。

林芳^[6]在其硕士论文中指出要真正做好圆锥曲线复习课教学关键有两点：一是教学内容的选择，应达到以下四个标准：1. 具有典型性；2. 有多种求解思路；3. 体现重要思想；4. 可推广和一般化。二是内容的组织，应精设题组，设置变式训练。

何善亮^[7]提出复习课教学的四点要求，一是以学生为主体，使学生的复习更加深入；二是设计有定向作用的教学目标和内容，复习课的教学目标与内容要与新授课展现出差别，并且要专门进行设计；三是根据知识类别，匹配不同的复习方法，增加复习课的趣味性，同时注重构建知识体系和知识到能力的各类台阶；四是注重对复习课教学进行评价，利用评价弥补学生个体间的差异性，使每个学生都达成发展的目标。

卓斌^[3]在一节圆锥曲线复习课的实际教学后进行教学反思，指出圆锥曲线复习课教学设计与教学过程应注意以下四点：一是题组教学，充分扎实地彰显变式训练；二是深研教材，科学有序地组织教学内容；三是使用媒体，动态呈现与化隐为显；四是生本课堂，耐心倾听与延迟判断。

丰效辉^[8]给出了圆锥曲线复习的三条策略，将复杂数学知识简单化；注重数学模型对理论知识的表达；画图是解决数学问题的有效办法。

上述研究表明，高三小专题复习课的教学存在以下几个问题：一是专题设置指向不够明确，教师对于专题复习课的教学目标认识不足。二是过于追求学习容量与节奏，较多教师对于专题复习课的内容处理上，更多的是采用题海战术，一味堆砌题目，造成课堂容量过大，课堂效率较低。三是不注重合理组织有效学习活动，问题设计不够合理，就题论题，整堂课无法达到启发学生的目的。

针对这些问题，要上好一堂高三圆锥曲线复习专题课，应从三个方面入手，一是教学目标，应设计有定向作用的教学目标，复习课的教学目标与内容要与新授课展现出差别。二是教学内容的选择，应做到回归教材，深研教材，挖掘教材，

同时选择的内容应满足以下标准：1. 具有典型性；2. 有多种求解思路；3. 体现重要思想；4. 可推广和一般化。三是内容的组织，应设置题组教学，加强变式训练，在问题的引导上，应层层深入，不断启发学生，提升学生思维的活跃性，提高课堂的教学效率。

三、参考文献

- [1]单铭成. 低起点, 小步子, 炼方法复习课教学思考与设计——《圆锥曲线的离心率问题》高三复习课教学思考与设计[J]. 教育研究与评论(中学教育教学), 2019(12):74-77.
- [2]姚恒. 圆锥曲线定义的探索及运用——一堂高三二轮复习课的教学与反思[J]. 课程教育研究, 2012(13):102-103.
- [3]卓斌. 以探究性题组引领课堂——《圆锥曲线类型的判定》复习课教学设计与反思[J]. 教育研究与评论(课堂观察), 2014(03):36-39.
- [4]余建国. 依托技术 引导方法 把握本质——以一节高三圆锥曲线第二轮复习课为例[J]. 中国数学教育, 2016(22):39-42.
- [5]李光裕. 高三数学小专题复习课的教学[J]. 中国数学教育, 2014(08):23-26.
- [6]林芳. 培养数学运算素养的微专题设计研究[D]. 福建师范大学, 2019.
- [7]何善亮. 复习课教学存在的问题及其改进建议[J]. 当代教育科学, 2012(02):37-40.
- [8]丰效辉. 高中数学圆锥曲线复习策略探析[J]. 才智, 2017(11):113.

《椭圆的离心率》教学设计

郭泽琳 林晓芹 赵萍

一、内容与内容解析

(一) 教学内容

椭圆的离心率

(二) 内容解析

❖ 内容解读:

“椭圆的离心率”属于“平面解析几何”板块，该板块学习了直线、圆、椭圆、双曲线、抛物线，分别从他们的定义、标准方程和几何性质方面进行系统研究. 板块内的知识融合体现在：①直线与圆、直线与圆锥曲线的位置关系；②除直线外的两种曲线相交、相切问题；③在复杂的曲线位置关系中特殊几何性质的考察，例如：渐近线、离心率. 该板块融汇了函数、三角、向量、平面几何、平

面解析几何的相关内容，试题具有很强的综合性、逻辑性，“椭圆的离心率”是其中的一个核心考点.从历年高考看，多以选择填空题的形式出现，通常有两类：求椭圆离心率的值以及离心率的取值范围，求解这两类问题的关键在于构建出 a 、 b 、 c 之间的相等关系或不等关系.这部分试题具有灵活性强、思维发散性广的特点，近年来难度有所下降，成为学生取得理想成绩的必备复习内容.

❖ 教材解读：

教材中，椭圆的简单几何性质这节课是从椭圆的定义（几何特征）出发建立椭圆的标准方程的基础上，再利用椭圆的标准方程研究它的几何性质，是对椭圆的深入认识.教材中通过数与形的结合寻找改变椭圆圆扁程度的基本量，引导学生找到一个合适量来刻画椭圆的圆扁程度，将椭圆的焦距 $2c$ 与长轴长 $2a$ 的比值称为“离心率”，接着从代数的角度分析椭圆的形状变化，即：当 e 越大时，椭圆越扁； e 越小时，椭圆越接近于圆.并在例题 6 中隐晦地引出椭圆的第二定义，扣紧了椭圆与离心率的关系.

二、学情分析

❖ 认知基础：

本节课是椭圆复习课的第二节课，第一节课讲了椭圆的概念，椭圆的概念中对椭圆的方程以及椭圆的几何性质都有做了简单的复习.学生在高二阶段已经历对椭圆几何性质的探究及其知识的建构，也认识到数形结合思想在数学中的重要地位，能根据标准方程得到几何性质，也能根据某些几何性质求得标准方程，为本节课继续从几何与代数的角度切入求解离心率问题打下了一个良好的基础.

❖ 认知障碍：

在新课程中，圆锥曲线的离心率问题是高考中常考的问题，由于它涉及圆锥曲线较多的基本量，方程与曲线问题，方程组与不等式的求解问题等，所以相对比较复杂，学生常常感到难以下手，不好把握.

三、教学目标

知识目标：掌握椭圆离心率的定义以及离心率的求法.

能力目标：能构建等量关系及不等关系求椭圆离心率的值及取值范围，提高分析问题、解决问题的能力.

素养目标：经历从数和形两方面分析椭圆的离心率与基本量 a 、 b 、 c 之间的关系，提升直观想象素养；通过试题变式的训练，强化数形结合、方程思想在解题中的应用，发展逻辑推理素养.

情感目标：增强学习解析几何的兴趣和信心，感受几何图形的美，增强研究高考试题的意识.

四、重难点分析

1. 教学重点：求椭圆离心率的值与取值范围的基本方法.
2. 教学难点：如何探究（寻求）出 a 、 b 、 c 之间的相等关系或不等关系.
关键点：通过代数方法和几何方法，建立 a 、 b 、 c 的方程或不等式.

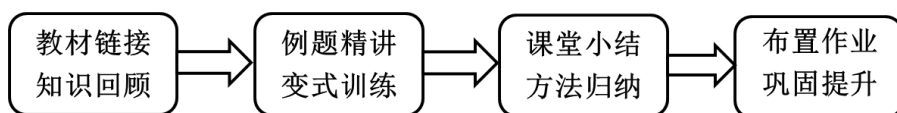
五、教学方式

启发式与探究式相结合.

六、教学手段

利用 PPT 和几何画板，对椭圆进行动态演示，以便于学生观察图象特征，更快更好地得出相关概念和图象性质.

七、教学流程设计



八、教学过程设计

教学环节：教材链接，知识回顾

教学内容	师生活动	设计意图
【问题 1】 椭圆的离心率我们是怎么定义的呢？ 【问题 2】 椭圆的三个定义是什么？ 【问题 3】 如何求离心率的值或取值范围呢？解题 解题关键是什么？	教师带着学生 回顾椭圆离心率的 定义，同时链接到教 材，复习椭圆的三个 定义.	紧扣教材，定位 椭圆的三个定义，引 导学生找到定义与 离心率的关联，加深 学生对椭圆定义的 理解与记忆，为后续 利用椭圆的定义求 离心率问题做铺垫.

教学环节：例题精讲，变式探究

教学内容	师生活动	设计意图
【例题与变式】 题型 1 利用焦点三角形求解离心率问题 例 1: (2018 年全国卷 II 文科第 11 题) 已知 F_1 、 F_2 是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点，若椭圆上存在点 P ，使得		以高考真题作为 母题，采用题组的形 式，从例 1 到变式 3， 随着条件的一般性不 断增加，结论的一般

$PF_1 \perp PF_2$ ，且使 $\angle PF_2F_1 = 60^\circ$ ，则椭圆 C 的离心率为 ()。

- A. $1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$ B. $2 - \sqrt{3}$ C. $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ D. $\sqrt{3}-1$

变式 1: 已知 F_1, F_2 是椭圆的

C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 两个焦点，若椭圆上

存在点 P ，使得 $\angle PF_1F_2 = \alpha$ $\angle PF_2F_1 = \beta$ ，则椭圆 C 的离心率为_____。

变式 2: 已知 F_1, F_2 是椭圆

C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点，若椭圆上存在

点 P ，使得 $PF_1 \perp PF_2$ ，则椭圆的离心率的可能取值为 ()

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{3}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

变式 2 后的课后练习，再设计一个小的变式——将焦点三角形的顶角 90° 改为 120° ，让学生充分体会方法的优化选择。

题型二：利用几何图形对称性求解离心率问题

例 2: 已知 F_1, F_2 分别是椭圆

C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点，过点

F_2 且的直线 l 与椭圆交于 A, B 两点，若 $\triangle ABF_1$ 是等边三角形，则该椭圆的离心率 e 为_____。

变式 1: 已知椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ ，A 为椭圆的左顶点，B、C 在椭圆上，若四边形 OABC 为平行四边形，且 $\angle OAB = 30^\circ$ ，则椭圆的离心率 e 为_____。

变式 2: 若椭圆 C: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 上存在三点，使得这三点与椭圆中心恰好是一个正方形的四个顶点，则该椭圆的离心率 e 为 ()

教师在讲解例 1 后，给出变式 1 让学生到黑板板书，引导学生经历由特殊到一般，归纳二级小结论。

变式 2 教师引导学生仿照前面变式的做法求离心率的取值范围，并从几何的视角经历对椭圆性质的探究

例 2 教师操控几何画板让学生自主发现满足 $AF_1 = BF_1$ 的直线 AB 与 x 轴的位置关系，找到解决例 2 的关键点。

变式 1 教师引导学生发现过椭圆作平行于 x 轴的直线，与椭圆的两个交点关于 y 轴对称这一关

性也增加——从确定的离心率的值到不确定的离心率的取值范围；

变式 1 继续将条件一般化，仍然在焦点三角形当中确定比值，引导学生感悟变中的不变性。

变式 2 以多选题的形式链接新高考，从代数和几何的视角经历对椭圆性质的探究及其知识的建构，让学生体会数形结合思想在数学中的重要地位，并能理解标准方程中 a, b, c 的几何意义。

例 2 利用几何图形对称性求离心率；利用椭圆的对称性可确定焦点三角形的形状，便可采用与例 1 类似的方法直接利用公式求出离心率的值，让学生充分体会转化思想和通性通法。

变式 1 与变式 2 即将等边三角形变成平行四边形、正方形，无论怎么变，都是依据图形的对称关系在几何图形当中找 ac 的之间的关系，由对称性，通经

<p>A. $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{3}}{3}$ C. $\frac{\sqrt{2}}{2}$ D. $\frac{\sqrt{6}}{3}$</p> <p>变式 3: 已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的中心为原点 O, $F(-2\sqrt{5}, 0)$ 为 C 的左焦点, P 为 C 上一点, 满足 $OP = OF$ 且 $PF = 4$, 则椭圆 C 的离心率为_____.</p>	<p>键点.</p>	<p>的长度等等. 引导学生可充分利用椭圆的对称性得到题干的隐含条件.</p>
---	------------	---

教学环节: 课堂小结, 方法归纳

教学内容	师生活动	设计意图
<p>【课堂小结】</p> <p>1. 求解椭圆离心率问题的关键: 探究 (寻求) 出 a、b、c 三个基本量之间的相等与不等关系.</p> <p>2. 探究方法: (1) 代数法; (2) 几何法</p> <p>3. 思想方法: 数形结合思想、转化与化归思想、从特殊到一般思想、函数与方程思想</p>	<p>教师引导学生梳理本节课的学习要点. 同时带着学生一起归纳求椭圆离心率问题的两种方法: 代数法和几何法.</p>	<p>掌握解决离心率问题的关键及方法, 会根据题目条件进行“形”与“数”的相互转化.</p>

教学环节: 布置作业, 巩固提升

教学内容	师生活动	设计意图
<p>【布置作业】</p> <p>已知 F_1、F_2 分别是椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的左右焦点, 过点 F_2 的直线 l 交椭圆于 A、B 两点, 且 $\overrightarrow{AF_2} = 2\overrightarrow{F_2B}$. 有以下三个条件:</p> <p>① AF_1, AB, BF_1 依次成等差数列</p> <p>② 直线 l 的斜率 $k_l = \frac{\sqrt{3}}{3}$</p> <p>③ $\overrightarrow{AF_1} \cdot \overrightarrow{AF_2} = 0$</p> <p>请在以上 3 个条件中选择一个, 求椭圆 C 的离心率</p> <p>注: 如果选择多个条件分别解答, 按第一个解答计分.</p>	<p>布置课后作业, 巩固学习效果.</p>	<p>链接新高考, 以一道结构不良问题作为前面内容的检测练习, 考察学生对于寻找出椭圆的基本量之间的相等与不等关系的方法领悟及掌握情况, 拓展学生思维, 提高数学素养.</p>

板书设计：

椭圆的离心率

一、离心率的定义

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \quad (0 < e < 1)$$

二、离心率的值和取值范围

1. 探究 a 、 b 、 c 之间的数量关系（相等关系或不等关系）

2. 代数法

几何法