模糊市场中含有投资约束的最优投资消费问题

杨　舟*,吕漫妮,魏智健

(华南师范大学数学科学学院，广州510631)

摘要： 假设金融市场中的投资具有约束，期望回报率向量和波动率矩阵均具有不确定性。为了求出该市场中最优投资消费策略的表达式，首先建立鲁棒效用下的最优投资消费模型；然后将模型转化为一个有约束条件的多元函数的鞍点问题，其中的鞍点对应着模型中的最优投资消费策略和最坏情形下的市场参数；最后给出最优投资消费策略和最坏情形下市场参数的显示表达式，并提供相应的金融解释。

关键词： 投资消费；投资约束；市场模糊

中图分类号： O232

Optimal Investment-Consumption Choice with Portfolio Constraint in Ambiguity Market

YANG Zhou,LV Manni,WEI Zhijian

(School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, China)

Abstract: An optimal investment-consumption choice problem with portfolio constraint is considered in this paper, where the expected return rate and volatility are uncertain. In order to achieve the optimal investment-consumption strategies, this problem is formulated into an optimal stochastic control problem, and then transformed into a saddle point problem of a function with constraint, where the saddle point corresponds the optimal investment-consumption strategies and the worst-case parameters. Finally, the explicit form of the optimal investment-consumption strategies and the worst-case parameters are provided, and some financial explanation about some results are presented.

Key words:portfolio-consumption choice; portfolio constraint; ambiguity market

经典的最优投资消费模型假设投资人对金融市场的认识是充分的，可以通过历史信息拟合出真实的市场参数；投资人的融资能力和金融市场均理想化，投资策略不受任何限制。但实际中并非如此，例如，投资人的信息是有限的，只能估计出市场参数的大致取值范围。再如投资人借款能力是有限的，金融市场中的投资方式也受规则的约束，因此投资策略具有约束。为了更为贴近真实的金融市场，有必要在投资消费模型中考虑投资约束和市场模糊。

关于投资消费问题的研究源于文献[1]，该文建立了一个离散时间模型，研究如何设计投资组合使平均回报最大或风险最小；随后，MRETON[2, 3]将文献[1]中结果推广到连续时间模型，并且在模型中引入消费。

收稿日期:2018-08-13

基金项目:国家自然科学基金项目(11771158,11801091)

***通讯作者:**杨舟,教授,Email:yangzhou@scnu.edu.cn.

随后大量的文献对该问题从不同的角度进行了推广和研究，如文献[4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14]及其中的相关文献。最近，文献[15] 对具有投资消费约束、市场模糊和存在借贷成本的最优投资消费模型进行了研究，但该文只对市场中只存在一个风险资产的问题的性质进行了研究。

本文中的最优投资消费模型假设：金融市场中含有多个风险资产，风险资产的市场参数——期望回报率向量和波动率矩阵均存在不确定性，取值于一个给定的紧集，而且市场中存在投资约束；投资人在市场中进行投资消费，通过消费和终值财富获得效用，在所有市场参数中考虑最坏的情形，以鲁棒的期望效用作为自己的判断依据(指标泛函)，通过选择合适的投资消费策略，使自己的指标泛函最大。由于要同时考虑最坏情形下的市场参数和最优的投资消费策略，所以该模型可描述为一个极小极大问题；由于存在投资约束，市场参数取值于紧集，所以极小极大问题含有约束条件。与文献[15]中的模型相比，本文中的模型是一个多风险资产的投资消费问题，期望回报率向量和波动率矩阵的约束，极大地加大了问题的难度，具有很大的挑战性，但也丰富了结果、贴近了现实，其结果也更具有现实意义。

本文将在第1节建立带投资约束、市场模糊的最优投资消费模型，并通过文献[15]的相关结果将该模型简化为一个带约束条件的多元函数的鞍点问题，其中的鞍点对应着模型中的最优投资消费策略和最坏情形下的市场参数。然后在第2节猜测出鞍点，即最优投资消费策略和最坏情形下的市场参数的显示表达式，并给出相应的金融解释。

1 模型的推导

金融市场中含有一个无风险资产S_0和d个风险资产$\boldsymbol{S} := (S_1, \cdots, S_d)^{\mathrm{T}}$，它们的价格服从如下的随机微分方程：

$$\mathrm{d}S_{0,s} = rS_{0,s}\mathrm{d}s, \tag{1}$$

$$\mathrm{d}S_{i,s} = \mu_{i,s}S_{i,s}\mathrm{d}s + \sum_{j=1}^{d'} \sigma_s^{ij} S_{i,s}\mathrm{d}W_{j,s}, \tag{2}$$

其中,r是常数的无风险利率；$\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \cdots, \mu_d)^{\mathrm{T}}$是风险资产的期望回报率列向量；$\boldsymbol{\Sigma} := (\sigma^{ij})_{d\times d'}$ 是风险资产的波动率矩阵；$\boldsymbol{W} := (W_1, \cdots, W_{d'})^{\mathrm{T}}$是一个$d'$维的标准布朗运动，该布朗运动定义在满足通常条件的概率空间$(\Omega, F, \mathcal{F}, P)$上，$\mathcal{F} := \{F_t\}_{t\geq 0}$是由$\boldsymbol{W}$ 生成的自然过滤，$d \leq d'$。

投资者在市场中投资消费，由于投资者信息有限，所以不能准确确定市场的参数$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$，只能够确定该参数属于如下的集合

$$\mathcal{B} := \left\{(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) : (\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) \text{ 关于 } \mathcal{F} \text{ 渐进可测，且 } (\boldsymbol{\mu}_s, \boldsymbol{\Sigma}_s\boldsymbol{\Sigma}_s^{\mathrm{T}}) \in B := B^{\mu} \times B^{\Sigma}\right\},$$

其中,$B^{\mu} := \otimes_{i=1}^{d}[\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i], B^{\Sigma} := \{\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}} \in \mathcal{S}_+^d : (\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}})_{ii} \in [\underline{\sigma}_i^2, \overline{\sigma}_i^2], i = 1, \cdots, d\}$，$\mathcal{S}_+^d$代表由所有半正定、$d \times d$维的实对称阵组成的集合，常数$\underline{\mu}_i, \overline{\mu}_i, \underline{\sigma}_i, \overline{\sigma}_i$满足$-\infty < \underline{\mu}_i \leq \overline{\mu}_i < +\infty$, $0 \leq \underline{\sigma}_i \leq \overline{\sigma}_i < +\infty$, $\overline{\sigma}_i > 0, i = 1, \cdots, d$。集合$B^{\mu}, B^{\Sigma}$反映了投资人信息的多少，投资人的信息越少，对市场参数的估计误差就越大，从而市场参数取值的集合越大。特别地，集合B^{Σ}反映投资人对单个的风险资产有一定的了解，可以估计其波动率的取值范围，但对于它们之间的关系一无所知。

设投资人投资消费的终止时刻为正常数T，记投资风险资产的份额为$\boldsymbol{\pi} := (\pi_1, \cdots, \pi_d)^{\mathrm{T}}$，消费率与财富之比为$c$。记$X^{t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}}$ 为初始时刻为t，初始财富为$x > 0$，投资消费策略为$(\boldsymbol{\pi}, c)$，模型参数为$(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$的

财富过程。利用 (1)和 (2)，根据自融资条件，知道财富过程满足如下的随机微分方程，

$$X_s^{t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} = x + \int_t^s \left[\boldsymbol{\mu}_u^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\pi}_u + r(1 - \mathbf{1}_d{}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\pi}_u) - c_u \right] X_u^{t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} \,\mathrm{d}u + \int_t^s X_u^{t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{\pi}_u^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\Sigma}_u \,\mathrm{d}\boldsymbol{W}_u,$$

其中,$\mathbf{1}_d$指分量均为1的d维列向量。投资消费策略的可容许策略集为

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t,x) :\ = \ \Bigg\{ & (\boldsymbol{\pi},c) : (\boldsymbol{\pi},c) \text{ 关于 } \mathcal{F}_t^T \text{ 渐进可测}, (\boldsymbol{\pi}_s, c_s) \in A,\ \int_t^T \left(|\boldsymbol{\pi}_s|^2 + c_s \right) \mathrm{d}s < +\infty, \\ & \left\{ \int_t^\tau \ln\left(c_s X_s^{t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} \right) \mathrm{d}s \right\}_{\tau \in \mathcal{U}(t,T)} \text{ 和 } \left\{ \ln X_\tau^{t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} \right\}_{\tau \in \mathcal{U}(t,T)} \text{ 均一致可积} \Bigg\},\end{aligned}$$

其中,$\mathcal{F}_t^T$ 是由$\{\boldsymbol{W}_s - \boldsymbol{W}_t\}_{s=t}^T$生成的自然过滤；$A := A^\pi \times [0, +\infty)$, $A^\pi := \otimes_{i=1}^d [\underline{\pi}_i, \overline{\pi}_i]$，常数$\underline{\pi}_i, \overline{\pi}_i$满足$-\infty \le \underline{\pi}_i \le 0$, $1 \le \overline{\pi}_i \le +\infty, i = 1, \cdots, d$; $\mathcal{U}(t,T)$ 是由所有取值于$[t,T]$的$\mathcal{F}_t^T$停时组成的集合。

投资人希望最大化消费的累积效用贴现与终止时刻财富效用的贴现之和的期望，即

$$\mathcal{J}(t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) := E\left[\int_t^T \lambda e^{-\rho(s-t)} \ln\left(c_s X_s^{t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} \right) \mathrm{d}s + e^{-\rho(T-t)} \ln\left(X_T^{t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}} \right) \right],$$

其中,正常数λ和ρ分别代表消费累积效用对终止财富效用的权重和贴现率。由于投资人不能确定真实的市场参数，只知道市场参数属于集合$\mathcal{B}$。本文假设投资人采用鲁棒的策略，即将最坏情形下的效用的期望作为目标泛函。因此投资人会从可容许投资策略集$\mathcal{A}(t,x)$中选择最优的投资消费策略$(\boldsymbol{\pi}^*, c^*)$，从市场参数集合$\mathcal{B}$中采用最坏情形下的市场参数$(\boldsymbol{\mu}^*, \boldsymbol{\Sigma}^*)$使得

$$J(t,x) := \sup_{(\boldsymbol{\pi},c) \in \mathcal{A}(t,x)} \inf_{(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) \in \mathcal{B}} \mathcal{J}(t,x;\boldsymbol{\pi},c,\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}) = \mathcal{J}(t,x;\boldsymbol{\pi}^*,c^*,\boldsymbol{\mu}^*,\boldsymbol{\Sigma}^*), \tag{3}$$

其中,函数$J(.)$称为最优化问题 (3)的值函数。

由文献[15]可知，最优化问题 (3)可以归结为如下的一个多元函数在约束条件下的鞍点问题，该函数为

$$F(x_q; \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}, x_c; \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}) := -\frac{1}{2} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}{}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}} + \left[(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1}_{\boldsymbol{d}})^{\mathrm{T}} \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}} + r \right] + \left(\frac{\lambda \ln x_c}{x_q} - x_c \right), \tag{4}$$

其中,$x_q \in \mathbf{R}^+$, $(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}, x_c) \in A$, $(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}) \in B$.

引理1 ([15]) 假设$(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\pi}}^*(x_q), \widetilde{x}_c^*(x_q); \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\mu}}^*(x_q); \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*(x_q))$ 满足如下性质：

(i) 对于每一个$x_q \in \mathbf{R}^+$和任意的$(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}, x_c) \in A$, $(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}) \in B$,有

$$\begin{aligned} F(x_q; \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\pi}}^*(x_q), \widetilde{x}_c^*(x_q); \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}) &\ge F(x_q; \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\pi}}^*(x_q), \widetilde{x}_c^*(x_q); \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\mu}}^*(x_q), \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*(x_q)) \\ &\ge F(x_q; \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}, x_c; \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\mu}}^*(x_q), \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*(x_q)), \end{aligned} \tag{5}$$

其中$(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\pi}}^*(x_q), \widetilde{x}_c^*(x_q)) \in A$, $(\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\mu}}^*(x_q), \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*(x_q)) \in B$.

(ii) 若记$G(x_q) := F(x_q, \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\pi}}^*(x_q), \widetilde{x}_c^*(x_q); \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\mu}}^*(x_q), \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*(x_q))$, 则$G(x_q), \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\pi}}^*(x_q), \widetilde{x}_c^*(x_q), \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\mu}}^*(x_q)$和$\widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*(x_q)$均在区间$(0, +\infty)$上是局部有界的。

记$V(t,x) = g_1(t) \ln x + g_2(t)$, $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}^* = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\pi}}^*(g_1(\cdot))$, $x_c^* = \widetilde{x}_c^*(g_1(\cdot))$, $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}^* = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\mu}}^*(g_1(\cdot))$, $\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^* = \widetilde{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*(g_1(\cdot))$, 其中,

$$g_1(t) = \frac{\lambda}{\rho} + \left(1 - \frac{\lambda}{\rho}\right) e^{-\rho(T-t)}, \qquad g_2(t) = \int_t^T e^{-\rho(s-t)} g_1(s) G\left(g_1(s) \right) \mathrm{d}s. \tag{6}$$

则最优化问题 (3)的值函数$J=V$，最优的投资消费策略$(\boldsymbol{\pi}^*,c^*)=(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}^*,x_c^*)$，最坏情形下参数$(\boldsymbol{\mu}^*,\boldsymbol{\Sigma}^*)$满足$\boldsymbol{\mu}^*=\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}^*$ 和$\boldsymbol{\Sigma}^*(\boldsymbol{\Sigma}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*$。

3 最优策略与最坏参数的显式表达式

由引理1，可将最优化问题 (3)归结为多元函数F在约束条件下的鞍点问题。虽然最优化问题得到大大简化，但鞍点问题仍不平凡。这是因为函数F 含有4个变量，其中变量$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}$均是取值具有约束的$d$维向量，变量$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}$是半正定的矩阵，并且取值具有特殊的约束，因此该问题仍然具有相当大的难度。基于对金融问题的理解、分析和猜想，给出如下结果：

定理1 假设$|\theta_1|=\max(|\theta_i|,i=1,\cdots,d)>0$，其中

$$\begin{aligned}\theta_1 :&= \min\left(\frac{\underline{\mu}_1-r}{\overline{\sigma}_1},\overline{\sigma}_1\overline{\pi}_1\right)I_{\{\underline{\mu}_1>r\}}+\max\left(\frac{\overline{\mu}_1-r}{\overline{\sigma}_1},\overline{\sigma}_1\underline{\pi}_1\right)I_{\{\overline{\mu}_1<r\}},\\ \theta_i :&= \frac{\underline{\mu}_i-r}{\overline{\sigma}_i}I_{\{\underline{\mu}_i>r\}}+\frac{\overline{\mu}_i-r}{\overline{\sigma}_i}I_{\{\overline{\mu}_i<r\}}\ \ (i=2,\cdots,d),\end{aligned}$$

I_A代表集合A的示性函数,则最优投资消费策略$(\boldsymbol{\pi}^*,c^*)$和最坏情形下的参数$(\boldsymbol{\mu}^*,\boldsymbol{\Sigma}^*)$由如下形式给出：

(i) 最优投资策略的第一个分量$\pi_1^*=\theta_1/\overline{\sigma}_1$，其他的分量$\pi_i^*=0\ \ (i=2,\cdots,d)$；最优的消费策略为$c_t^*=\lambda/g_1(t)$，其中$g_1(t)$由式 (6)给出；

(ii) 最坏情形下的期望回报率向量$\boldsymbol{\mu}^*$和波动率矩阵$\boldsymbol{\Sigma}^*$满足$\mu_i^*=\underline{\mu}_iI_{\{\underline{\mu}_i>r\}}+\overline{\mu}_iI_{\{\overline{\mu}_i<r\}}+rI_{\{\underline{\mu}_i\le r\le\overline{\mu}_i\}}$ $(i=1,\cdots,d)$；$\boldsymbol{\Sigma}^*(\boldsymbol{\Sigma}^*)^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*:=(\widetilde{\sigma}_{ij}^*)_{i,j=1,\cdots,d}$，其中

$$\widetilde{\sigma}_{ij}^*:=\begin{cases}\overline{\sigma}_i^2, & i=j=1,\cdots,d;\\ \frac{\overline{\sigma}_i\overline{\sigma}_j\theta_i\theta_j}{\theta_1^2}, & \text{其他}.\end{cases}$$

证明 首先验证$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*\in B^{\Sigma}$。事实上，根据条件$|\theta_1|\ge|\theta_i|$知道对于任意的$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}\in\mathbf{R}^d$，均有

$$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}{}^T\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\pi}}=\sum_{i,j=1}^d\widetilde{\sigma}_{ij}^*x_{\pi,i}x_{\pi,j}=\left(\sum_{i=1}^d\frac{\overline{\sigma}_i\theta_ix_{\pi,i}}{\theta_1}\right)^2+\sum_{i=1}^d\left(1-\frac{\theta_i^2}{\theta_1^2}\right)\overline{\sigma}_i^2x_{\pi,i}^2\ge 0. \tag{7}$$

因此$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*$是半正定的实对称矩阵，即$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*\in\mathcal{S}_d^+$。另一方面，显然$(\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*)_{ii}=\overline{\sigma}_i^2\in[\underline{\sigma}_i^2,\overline{\sigma}_i^2]$，因此$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*\in B^{\Sigma}$。

其次验证对于任意的$x_q>0$，均有$(\boldsymbol{\mu}^*,\boldsymbol{\Sigma}^*)\in B$和$(\boldsymbol{\pi}^*,x_c^*(x_q))\in A$，其中$x_c^*(x_q)=\lambda/x_q$。事实上，根据$\boldsymbol{\mu}^*$ 的表达式容易看出$\boldsymbol{\mu}^*\in B^{\mu}$，结合$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*\in B^{\Sigma}$，即有$(\boldsymbol{\mu}^*,\boldsymbol{\Sigma}^*)\in B$。另一方面，因为$\lambda>0$，所以对于任意$x_q>0$ 均有$x_c^*(x_q)=\lambda/x_q>0$。根据θ_1的表达式知道$\pi_1^*=\theta_1/\overline{\sigma}_1\in[\underline{\pi}_1,\overline{\pi}_1]$。而且对于任意$i=2,\cdots,d$，均有$\pi_i^*=0\in[\underline{\pi}_i,\overline{\pi}_i]$。因此$\boldsymbol{\pi}^*\in A^{\pi}$，且对于任意的$x_q>0$，均有$(\boldsymbol{\pi}^*,x_c^*(x_q))\in A$。

下面，证明式 (5)中的第1个不等式，即对于任意$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}}\in B^{\mu},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}\in B^{\Sigma}$，均有

$$F(x_q;\boldsymbol{\pi}^*,x_c^*(x_q);\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\mu}},\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}})\ge F(x_q;\boldsymbol{\pi}^*,x_c^*(x_q);\boldsymbol{\mu}^*,\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{\Sigma}}^*).$$

事实上，根据F的定义式 (4)有

$$\begin{aligned}
F(x_q;\boldsymbol{\pi^*},x_c^*(x_q);\boldsymbol{x_\mu},\boldsymbol{x_\Sigma}) &= -\frac{1}{2}(\boldsymbol{x_\Sigma})_{11}(\pi_1^*)^2+x_{\mu,1}\pi_1^*+r(1-\pi_1^*)+\left[\frac{\lambda\ln x_c^*(x_q)}{x_q}-x_c^*(x_q)\right]\\
&\geq -\frac{1}{2}\overline{\sigma}_1^2(\pi_1^*)^2+\mu_1^*\pi_1^*+r(1-\pi_1^*)+\left[\frac{\lambda\ln x_c^*(x_q)}{x_q}-x_c^*(x_q)\right]\\
&= F(x_q;\boldsymbol{\pi^*},x_c^*(x_q);\boldsymbol{\mu^*},\boldsymbol{x_\Sigma^*}).
\end{aligned}$$

接着证明式 (5)中的第2个不等式，即对于任意$\boldsymbol{x_\pi}\in A^\pi, x_c\in[0,+\infty)$，均有

$$F(x_q;\boldsymbol{x_\pi},x_c;\boldsymbol{\mu^*},\boldsymbol{x_\Sigma^*})\leq F(x_q;\boldsymbol{\pi^*},x_c^*(x_q);\boldsymbol{\mu^*},\boldsymbol{x_\Sigma^*}).$$

事实上，根据F的定义式 (4)，容易有

$$F(x_q;\boldsymbol{x_\pi},x_c;\boldsymbol{\mu^*},\boldsymbol{x_\Sigma^*})=f(\boldsymbol{x_\pi})+\left(\frac{\lambda\ln x_c}{x_q}-x_c\right)\leq f(\boldsymbol{x_\pi})+\left(\frac{\lambda\ln x_c^*(x_q)}{x_q}-x_c^*(x_q)\right),$$

其中

$$f(\boldsymbol{x_\pi}):=-\frac{1}{2}\boldsymbol{x_\pi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x_\Sigma^*}\boldsymbol{x_\pi}+\Big((\boldsymbol{\mu^*})^{\mathrm{T}}-r\boldsymbol{1_d}^{\mathrm{T}}\Big)\boldsymbol{x_\pi}+r.$$

下面只需证明对于任意$\boldsymbol{x_\pi}\in A^\pi$，均有$f(\boldsymbol{x_\pi})\leq f(\boldsymbol{\pi^*})$。为此不妨假设$\underline{\mu}_1>r$，如若不然，必有$\overline{\mu}_1<r$，证明完全类似。根据 (7)知道，对于任意$\boldsymbol{x_\pi}\in A^\pi$，均有

$$\begin{aligned}
&f(\boldsymbol{x_\pi})\\
=&-\frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^d\frac{\overline{\sigma}_i\theta_ix_{\pi,i}}{\theta_1}\right)^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\left(1-\frac{\theta_i^2}{\theta_1^2}\right)\overline{\sigma}_i^2x_{\pi,i}^2+\sum_{i=1}^d\overline{\sigma}_i\theta_ix_{\pi,i}+(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)x_{\pi,1}+r\\
=&-\frac{1}{2\theta_1^2}\left[\sum_{i=1}^d\overline{\sigma}_i\theta_ix_{\pi,i}-\theta_1^2\right]^2-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d\left(1-\frac{\theta_i^2}{\theta_1^2}\right)\overline{\sigma}_i^2x_{\pi,i}^2+(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)x_{\pi,1}+\frac{\theta_1^2}{2}+r. \quad (8)
\end{aligned}$$

如果注意到$|\theta_1|=\max(|\theta_i|,i=1,\cdots,d)>0$，且$\pi_1^*=\theta_1/\overline{\sigma}_1$，对于任意$i=2,\cdots,d$，均有$\pi_i^*=0$，则容易看出对于任意$\boldsymbol{x_\pi}\in A^\pi$，均有

$$\left[\sum_{i=1}^d\overline{\sigma}_i\theta_i\pi_i^*-\theta_1^2\right]^2=\left[\overline{\sigma}_1\theta_1\pi_1^*-\theta_1^2\right]^2=0\leq\left[\sum_{i=1}^d\overline{\sigma}_i\theta_ix_{\pi,i}-\theta_1^2\right]^2, \quad (9)$$

$$\sum_{i=1}^d\left(1-\frac{\theta_i^2}{\theta_1^2}\right)\overline{\sigma}_i^2(\pi_i^*)^2=0\leq\sum_{i=1}^d\left(1-\frac{\theta_i^2}{\theta_1^2}\right)\overline{\sigma}_i^2x_{\pi,i}^2. \quad (10)$$

对于式 (8)中$(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)x_{\pi,1}$的估计，需要分2种情况讨论。

（1）当$\overline{\pi}_1\geq(\underline{\mu}_1-r)/\overline{\sigma}_1^2$时，对于任意$\boldsymbol{x_\pi}\in A^\pi$，均有

$$\theta_1=(\underline{\mu}_1-r)/\overline{\sigma}_1=(\mu_1^*-r)/\overline{\sigma}_1,\quad(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)\pi_1^*=0=(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)x_{\pi,1}.$$

（2）当$\overline{\pi}_1<(\underline{\mu}_1-r)/\overline{\sigma}_1^2$时，$\theta_1=\overline{\sigma}_1\overline{\pi}_1$，且$\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1=\underline{\mu}_1-r-\overline{\sigma}_1\theta_1>0$，从而对于任意$\boldsymbol{x_\pi}\in A^\pi$，均有

$$(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)\pi_1^*=(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)\frac{\theta_1}{\overline{\sigma}_1}=(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)\overline{\pi}_1\geq(\mu_1^*-r-\overline{\sigma}_1\theta_1)x_{\pi,1}.$$

因此,无论哪种情况下，对于任意$\boldsymbol{x_\pi} \in A^\pi$，均有

$$(\mu_1^* - r - \overline{\sigma}_1\theta_1)\pi_1^* \geq (\mu_1^* - r - \overline{\sigma}_1\theta_1)x_{\pi,1}.$$

结合式 (8), (9)和 (10)，容易看出对于任意$\boldsymbol{x_\pi} \in A^\pi$，确实均有$f(\boldsymbol{x_\pi}) \leq f(\boldsymbol{\pi^*})$，从而我们证明了 (5)中的第2个不等式。

显然$\boldsymbol{\pi^*}, \boldsymbol{\mu^*}, \boldsymbol{x_\Sigma^*}$是常向量或常矩阵，$x_c^*(x_q), F(x_q; \boldsymbol{\pi^*}, x_c^*(x_q); \boldsymbol{\mu^*}, \boldsymbol{x_\Sigma^*})$是局部有界的。因此我们已经验证了引理1中的所有条件，从而我们有引理1中相应的结论，即定理1的结果确实成立。 □

金融解释 (1)在经典的一维投资消费模型中，若无风险率为r，风险资产的期望回报率为μ、波动率为σ，则$(\mu - r)/\sigma$称为该风险资产的风险市场价格或sharpe比率。在本模型中，θ_1可以称为第一个风险资产的广义风险市场价格。若无投资约束，即$\underline{\pi}_1 = -\infty, \overline{\pi}_1 = +\infty$ 时，θ_1 即为最差期望回报率和波动率计算出的最差风险市场价格$(\mu_1^* - r)/\sigma_1^*$。由于投资约束的存在，所以导致最差风险市场价格受投资约束的影响，从而具有式 (7) 中的表达式。类似于经典的模型，θ_1的大小意味着第一个风险资产的好坏，如果该值非常大，意味该资产是优质资产，值得多头持有；反之如果该值非常小，意味该资产是劣质资产，值得卖空。该值的绝对值越大，意味着该风险资产越值得进行投资(若值为正则应该多头持有，若值为负则应该卖空)。

(2) 本文假设$\boldsymbol{x_\Sigma} \in B^\Sigma$，即投资人对$d$个风险资产的相关性一无所知。定理的结果表明最优的投资策略应该只投资第一个风险资产(因为$|\theta_1|$最大，所以该资产最值得投资)。该结果与经典理论中的分散化投资原则完全相反。这是因为风险资产间的各种相关性均有可能发生。如果还投资另外一种风险资产，可能存在比较坏情形下的矩阵$\boldsymbol{x_\Sigma^*}$使得投资存在损耗(见式 (8))，因此鲁棒效用下的最优投资策略应该只投资最值得投资的风险资产——第一个风险资产。

参考文献

[1] Markowitz H. Porfolio selection[J]. Journal of Finance,1952,7:77-91.

[2] Merton R C. Lifetime portfolio selection under uncertainty: the continuous-time case [J]. Review of Economics & Statistics,1969,51:247-257.

[3] Merton R C. Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model [J]. Journal of Economic Theory,1971,3(4):373-413.

[4] Bo, L,Capponi A. Optimal credit investment with borrowing costs [J]. Mathematics of Operations Research,2016,42(2):546-575.

[5] Choi K,Shim G. Disutility, optimal retirement, and portfolio selection [J]. Mathematical Finance,2006,16(2):443-467.

[6] Cvitanič J,Karatzas I. Convex duality in constrained portfolio optimization [J]. Annals of Applied Probability,1992,2:767-818.

[7] Sun J,Li Z,Zeng Y. Precommitment and equilibrium investment strategies for defined contribution pension plans under a jump-diffusion model [J]. Insurance: Mathematics and Economics,2016,67:158-172.

[8] Karatzas I,Shreve S. Methods of Mathematical Finance [M]. New York:Springer-Verlag,1998.

[9] Sun Z,Zheng X,Zhang X. Robust optimal investment and reinsurance of an insurer under variance premium principle and default risk [J]. Journal of Mathematical Analysis & Applications,2017,446(2):1666-1686.

[10] Xia J,Yan J. Markowitz' s portfolio optimization in an incomplete market [J]. Mathematical Finance,2006,16(1):203-216.

[11] Xu Z, Yi F. An optimal consumption-investment model with constraint on consumption [J]. Mathematical Control and Related Field,2016,6(3):517-534.

[12] Yang Z,Koo HK. Optimal Consumption and Portfolio Selection with Early Retirement Option [J/OL]. Mathematical of Operations Research,2018,[2018-6-13].https://doi.org/10.1287/moor.2017.0909.

[13] Yan H,Liang G,Yang Z. Indifference pricing and hedging in a multiple-priors model with trading constraints [J]. Science in China Ser. A: Mathematics,2015,58(4):689-714.

[14] Yao H,Li Z,Li D, Multi-period mean-variance portfolio selection with stochastic interest rate and uncontrollable liability [J]. European Journal of Operational Research,2016,252(3):837-851.

[15] Yang Z,Liang G,Zhou C. Constrained Portofolio-consumption strategies with uncertain parameters and borrowing costs [J/OL]. submitted,2017,[2017-10-8].https://arxiv.org/pdf/1711.02939.pdf

杨舟(1975-),男,湖北武汉人,教授,博士,Email yangzhou@scnu.edu.cn;
吕漫妮(1998-),女,广东汕头人,Email 837520548@qq.com;魏智健(1997-),男,广东广州人,Email 1664305022@qq.com。