第50卷第3期
2007年5月

数 学 学 报 中 文 版
ACTA MATHEMATICA SINICA, Chinese Series

Vol.50, No.3
May, 2007

文章编号: 0583-1431(2007)03-0601-14 **文献标识码**: A

复振荡理论中关于超级的角域分布

黄志波 陈宗煊

华南师范大学数学科学学院 广州 510631
E-mail: hzbo20019@sina.com; chzx@sina.com

摘 要 设 f_1 和 f_2 是微分方程 $f''+A(z)f=0$ 的两个线性无关的解, 其中 $A(z)$ 是无穷级整函数且超级 $\sigma_2(A)=0$. 令 $E=f_1f_2$. 本文研究了微分方程 $f''+A(z)f=0$ 的解在角域中的零点分布, 得出 E 的超级为 $+\infty$ 的 Borel 方向与零点聚值线的关系.

关键词 角域分布; 超级; 复微分方程
MR(2000) 主题分类 30D35
中图分类 O174.5

Angular Distribution with Hyper-Order in Complex Oscillation Theory

Zhi Bo HUANG Zong Xuan CHEN

School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, P. R. China
E-mail: hzbo20019@sina.com; chzx@sina.com

Abstract Let f_1 and f_2 be two linearly independent solutions of the differential equation $f''+A(z)f=0$, where $A(z)$ is an entire function with order $\sigma(A)=+\infty$ and hyper-order $\sigma_2(A)=0$. Set $E=f_1f_2$. In this paper, we investigate the zeros distribution of solutions of equation $f''+A(z)f=0$ in an angular domain. A relation between a cluster ray of the zeros and Borel direction of E with hyper order $+\infty$ is established.

Keywords angular distribution; hyper-order; complex differential function
MR(2000) Subject Classification 30D35
Chinese Library Classification O174.5

1 引言及主要结果

本文考虑微分方程

$$f''+A(z)f=0, \tag{1.1}$$

其中 $A(z)$ 是无穷级整函数且超级 $\sigma_2(A)=0$. 众所周知, 方程 (1.1) 的所有非平凡解都是整函数且其零点都是简单零点. 现在, 假设 f_1 和 f_2 是方程 (1.1) 的两个线性无关的解且令 $E=f_1f_2$. 我们知道, 当系数 $A(z)$ 的级 $\sigma(A)$ 为有穷时, 关于复微分方程 (1.1) 的重点研究是从 1982 年开始的. 但是, 当系数 $A(z)$ 为多项式时, 方程 (1.1) 解的零点分布有非常完善的结果, 而对于系数 $A(z)$ 为无穷级整函数时, 其结果甚少. 因此, 作者在本文主要讨论系数 $A(z)$ 为无穷级整函数时,

收稿日期: 2005-07-12; 修改日期: 2005-12-22; 接受日期: 2006-06-16
基金项目: 高校博士点基金资助项目 (20050574002); 广东省自然科学基金资助项目 (06025059)

方程 (1.1) 的解的零点在角域的分布情况, 特别地获得 E 的超级为 $+\infty$ 的 Borel 方向与零点聚值线的关系.

我们使用标准的 Nevanlinna 理论的记号 (见文 [1–3]). 为了叙述结果, 还需要以下定义.

设函数 $g(z)$ 是复平面上的整函数, $\arg z=\theta\in[0,2\pi)$ 是一条射线.

定义 1.1 设 $0\le\alpha<\beta<2\pi$, 复平面上的角域和扇形域分别定义为

$$\Omega(\alpha,\beta)=\{z\,|\,\alpha\le\arg z\le\beta,\,|z|>0\};\quad \Omega((\alpha,\beta),r)=\{z\,|\,z\in\Omega(\alpha,\beta),\,|z|<r\};$$

整函数 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的最大模定义为

$$M(\Omega((\alpha,\beta),r),g)=\sup\{|g(z)|:z\in\Omega((\alpha,\beta),r)\}.$$

整函数 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的级 $\sigma(\Omega(\alpha,\beta),g)$ 和超级 $\sigma_2(\Omega(\alpha,\beta),g)$ 分别定义为

$$\sigma(\Omega(\alpha,\beta),g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log M(\Omega((\alpha,\beta),r),g)}{\log r}$$

和

$$\sigma_2(\Omega(\alpha,\beta),g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log M(\Omega((\alpha,\beta),r),g)}{\log r}.$$

现在, 设 $n(\Omega((\alpha,\beta),r),\,g=a)$ 是方程 $g(z)=a$ 在扇形域 $\Omega((\alpha,\beta),r)$ 上的零点的个数.

定义 1.2 设 $0\le\alpha<\beta<2\pi$, 整函数 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的超级零点收敛指数 $\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),\,g=a)$ 定义为

$$\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),\,g=a)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log n(\Omega((\alpha,\beta),r),\,g=a)}{\log r}.$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 整函数 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\theta-\varepsilon,\,\theta+\varepsilon)$ 上的零点收敛指数 $\lambda_{\theta,\varepsilon}(g)$ 和超级零点收敛指数 $\lambda_{2,\theta,\varepsilon}(g)$ 分别定义为

$$\lambda_{\theta,\varepsilon}(g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log n(\Omega((\theta-\varepsilon,\,\theta+\varepsilon),r),\,g=a)}{\log r},$$

和

$$\lambda_{2,\theta,\varepsilon}(g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log n(\Omega((\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),r),\,g=a)}{\log r},$$

且 $\lambda_\theta(g)=\lim_{\varepsilon\to0}\lambda_{\theta,\varepsilon}(g)$ 和 $\lambda_{2,\theta}(g)=\lim_{\varepsilon\to0}\lambda_{2,\theta,\varepsilon}(g)$.

为证明后面的定理, 还需要角域内特征函数的一些记号 (见文 [4–6]).

定义 1.3 设 $g(z)$ 是角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的亚纯函数, $0<\beta-\alpha\le2\pi$, $k=\frac{\pi}{\beta-\alpha}$. 定义

$$A_{\alpha,\beta}(r,g)=\frac{k}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left\{\log^+|g(te^{i\alpha})|+\log^+|g(te^{i\beta})|\right\}\frac{dt}{t};$$

$$B_{\alpha,\beta}(r,g)=\frac{2k}{\pi r^k}\int_\alpha^\beta\log^+|g(re^{i\theta})|\sin k(\theta-\alpha)d\theta;$$

$$C_{\alpha,\beta}(r,g)=2\sum_{1<|b_v|<r}\left(\frac{1}{|b_v|^k}-\frac{|b_v|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\beta_v-\alpha);$$

$$D_{\alpha,\beta}(r,g)=A_{\alpha,\beta}(r,g)+B_{\alpha,\beta}(r,g);$$

$$S_{\alpha,\beta}(r,g)=A_{\alpha,\beta}(r,g)+B_{\alpha,\beta}(r,g)+C_{\alpha,\beta}(r,g),$$

其中 $b_v=|b_v|e^{i\beta_v}$ $(v=1,2,\ldots)$ 是 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内极点 (计算重数). $S_{\alpha,\beta}(r,g)$ 称为 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 中 Nevalinna 特征函数, $C_{\alpha,\beta}(r,g)$ 称为 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上极点的计数函数 (重级极点按重数计算), $\overline{C}_{\alpha,\beta}(r,g)$ 称为 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上不同极点的计数函数. 此时, 函数 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 上的超级 $\rho_2(\Omega(\alpha,\beta),g)$ 定义为

$$\rho_2(\Omega(\alpha,\beta),g)=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log S_{\alpha,\beta}(r,g)}{\log r}.$$

当方程 (1.1) 中系数 $A(z)$ 是有限级且 $\lambda_\theta(E)=\sigma(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),E)$ 时, 伍胜健在文 [7] 中获得下面的结果.

定理 A 设 $A(z)$ 是一个有限 $\sigma(A)$ 级的超越整函数, f_1 和 f_2 是方程 (1.1) 的两个线性无关的解. 记 $E=f_1f_2$. 再设 E 的零点收敛指数 $\lambda(E)=+\infty$, 则射线 $\arg z=\theta$ 是 E 的一条 ∞ 级 Borel 方向的充要条件为 $\lambda_\theta(E)=+\infty$.

当方程 (1.1) 中系数 $A(z)$ 是超级 $\sigma_2(A)=0$ 的无穷级整函数且 $\lambda_{2,\theta}(E)=\sigma_2(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),E)$ 时, 是否存在定理 A 类似的结果? 本文利用不同于文 [7] 中方法回答了上述问题, 得到以下结果.

定理 1 设 $\Omega(\alpha,\beta)$ 和 $\Omega(\alpha',\beta')$ 是两个角域且 $\alpha<\alpha'<\beta'<\beta$, $g(z)$ 是整函数且满足

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log M(r,g)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log S_{\alpha',\beta'}(r,g)}{\log r}=\sigma_2(\Omega(\alpha',\beta'),g).\tag{1.2}$$

如果

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log\log M(r,g)}{\log r}=0,\tag{1.3}$$

则对任意给定的有限复数 a, 至多除去一个例外, 有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log n(\Omega((\alpha,\beta),r),\ g=a)}{\log r}=\sigma_2(\Omega(\alpha',\beta'),g).$$

我们知道, 在亚纯函数的角域分布理论中, Borel 方向占有重要的地位. 这里, 将定义亚纯函数的超级 Borel 方向.

定义 1.4[1,2] 设 $g(z)$ 是超级为 ρ $(0\le\rho\le+\infty)$ 的亚纯函数. 射线 $\arg z=\theta_0$ $(0\le\theta_0<2\pi)$ 称为 $g(z)$ 的超级为 ρ 的 Borel 方向, 如果对任意给定的任意小的正数 ε 和任意复数 $a\in\mathbf{C}\cup\{\infty\}$, 至多除去两个可能的例外复数, 有

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log n(\Omega((\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon),r),\ g=a)}{\log r}=\rho.$$

关于 Borel 方向, 有

定理 2 设 $g(z)$ 满足定理 1 的假设, 则 $g(z)$ 在角域 $\Omega(\alpha',\beta')$ 内存在超级为 $\sigma_2(\Omega(\alpha',\beta'),g)$ 的 Borel 方向.

我们关注的是在条件 $\lambda_{2,\theta}(g)=\sigma_2(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),g)$ 下相应的结果, 有

定理 3 设 $A(z)$ 是超级为 $\sigma_2(A)=0$ 的无穷级整函数, f_1 和 f_2 是方程 (1.1) 的两个线性无关的解. 记 $E=f_1f_2$, 则 $\lambda_{2,\theta}(E)=+\infty$ 的充要条件为

$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log M(\Omega((\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),r),E)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)}{\log r}=+\infty.$$

定理 4 设 $A(z)$ 是超级为 $\sigma_2(A)=0$ 的无穷级整函数, f_1 和 f_2 是方程 (1.1) 的两个线性无关的解. 记 $E=f_1f_2$. 又设 E 的超级零点收敛指数为 $+\infty$, 则从原点出发的射线 $\arg z=\theta$ 是 E 的超级为 $+\infty$ 的 Borel 方向且 $\rho_2(\Omega(\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon),E)=+\infty$ 的充要条件为 $\lambda_{2,\theta}(E)=+\infty$.

2 定理 1 的证明

为了证明定理 1, 我们需要下面的引理.

引理 2.1[4] 假设 $g(z)(\neq$ 常数) 是亚纯函数, $\Omega(\alpha,\beta)$ 是角域, $0<\beta-\alpha\leq 2\pi$, 则

(i) 对每个复数 $a\neq\infty$, 有

$$S_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{1}{g-a}\right)=S_{\alpha,\beta}(r,g)+O(1);$$

(ii) 对每个 $r<R$, 有

$$A_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{g'}{g}\right)\leq K\left\{\left(\frac{R}{r}\right)^k\int_1^R\frac{\log T(t,g)}{t^{1+k}}dt+\log\frac{r}{R-r}+\log\frac{R}{r}+1\right\},$$

和

$$B_{\alpha,\beta}\left(r,\frac{g'}{g}\right)\leq\frac{4k}{r^k}m\left(r,\frac{g'}{g}\right),$$

其中 $k=\frac{\pi}{\beta-\alpha}$, K 是一个不依赖于 r 和 R 的正常数.

类似于文 [5] 的证明, 我们可以得到角域内特征函数的一些性质.

引理 2.2 假设 $g(z)$ 是角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的亚纯函数, a_j $(j=1,2,\ldots,q-1)$ 是 $q-1$ $(q\geq 2)$ 个不同的有限的复数. 令 $\psi=\prod_{j=1}^{q-1}(g-a_j)$, 则有

$$(q-1)S_{\alpha,\beta}(r,g)<S_{\alpha,\beta}(r,\psi)+O(1).$$

证明 根据 $C_{\alpha,\beta}(r,g)$ 的定义, 有

$$(q-1)C_{\alpha,\beta}(r,g)=C_{\alpha,\beta}(r,\psi).\tag{2.1}$$

下面将推导出 $D_{\alpha,\beta}(r,g)$ 和 $D_{\alpha,\beta}(r,\psi)$ 之间的关系. 为此, 令 $a=\max\{|a_1|,|a_2|,\ldots,|a_{q-1}|\}$, 并考虑下面两种情形.

情形 1 如果 $|g|\geq 2a$, 则有

$$\prod_{j=1}^{q-1}|g-a_j|\geq\left(\frac{|g|}{2}\right)^{q-1}.$$

由此, 有 $(q-1)\log^+|g|\leq(q-1)\log 2+\log^+|\psi|$.

情形 2 如果 $|g|<2a$, 有

$$\log^+|g|<\log 2+\log^+a,\quad (q-1)\log^+|g|\leq(q-1)(\log 2+\log^+a)+\log^+|\psi|.$$

综合上述两种情形, 有

$$(q-1)D_{\alpha,\beta}(r,g)<D_{\alpha,\beta}(r,\psi)+O(1).\tag{2.2}$$

因此, 由 (2.1) 和 (2.2) 式, 有 $(q-1)S_{\alpha,\beta}(r,g)<S_{\alpha,\beta}(r,\psi)+O(1)$. 引理 2.2 证毕.

引理 2.3 假设 $g(z)$ 是角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的亚纯函数, a_j $(j=1,2,\ldots,q-1)$ 是 $q-1$ $(q\geq 2)$ 个不同的有限的复数, 则有

$$(q-2)S_{\alpha,\beta}(r,g) < \sum_{j=1}^{q-1} C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-a_j}\Big) + C_{\alpha,\beta}(r,g') - C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big) - C_{\alpha,\beta}(r,g) + \sum_{j=0}^{q-1} D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-a_j}\Big) + O(1),$$

其中 $a_0=0$.

证明 令 $\psi=\prod_{j=1}^{q-1}(g-a_j)$. 由引理 2.1 (i), 有

$$\begin{aligned} S_{\alpha,\beta}(r,\psi) &= S_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\psi}\Big)+O(1) = D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\psi}\Big)+C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\psi}\Big)+O(1), \\ &= D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\psi}\Big)+\sum_{j=1}^{q-1} C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-a_j}\Big)+O(1). \end{aligned} \tag{2.3}$$

然而

$$D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\psi}\Big) \leq D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{\psi}\Big)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big), \tag{2.4}$$

和

$$\begin{aligned} D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big) &= S_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)+O(1) \\ &= D_{\alpha,\beta}(r,g')+C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)+O(1) \\ &\leq D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g}\Big)+D_{\alpha,\beta}(r,g)+C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)+O(1) \\ &= S_{\alpha,\beta}(r,g)+C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)-C_{\alpha,\beta}(r,g) \\ &\quad +D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g}\Big)+O(1). \end{aligned} \tag{2.5}$$

因此, 由引理 2.2 和 (2.3), (2.4) 和 (2.5) 式, 有

$$\begin{aligned} (q-1)S_{\alpha,\beta}(r,g) &< S_{\alpha,\beta}(r,\psi)+O(1) \\ &= \sum_{j=1}^{q-1} C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-a_j}\Big)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\psi}\Big)+O(1) \\ &\leq \sum_{j=1}^{q-1} C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-a_j}\Big)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{\psi}\Big)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)+O(1) \\ &= S_{\alpha,\beta}(r,g)+\sum_{j=1}^{q-1} C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-a_j}\Big)+C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big) \\ &\quad -C_{\alpha,\beta}(r,g)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g}\Big)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{\psi}\Big)+O(1), \end{aligned}$$

即

$$(q-2)S_{\alpha,\beta}(r,g)<\sum_{j=1}^{q-1}C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-a_j}\Big)+C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)$$
$$-C_{\alpha,\beta}(r,g)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g}\Big)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{\psi}\Big)+O(1). \tag{2.6}$$

因为 $\frac{1}{\psi}=\frac{1}{\prod_{j=1}^{q-1}(g-a_j)}$ 可写成最简分式的形式, 即

$$\frac{1}{\psi}=\sum_{j=1}^{q-1}\frac{c_j}{g-a_j},$$

其中 c_j $(j=1,2,\ldots,q-1)$ 是常数. 因此, 有

$$\log^+\left|\frac{g'}{\psi}\right|\le\log^+\left(\sum_{j=1}^{q-1}|c_j|\cdot\left|\frac{g'}{g-a_j}\right|\right)\le\sum_{j=1}^{q-1}\log^+|c_j|+\sum_{j=1}^{q-1}\log^+\left|\frac{g'}{g-a_j}\right|+\log(q-1).$$

由此, 有

$$D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{\psi}\Big)\le\sum_{j=1}^{q-1}D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-a_j}\Big)+O(1). \tag{2.7}$$

由 (2.6) 和 (2.7) 式, 有

$$\begin{aligned}(q-2)S_{\alpha,\beta}(r,g)&<\sum_{j=1}^{q-1}C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-a_j}\Big)+C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)\\&\quad-C_{\alpha,\beta}(r,g)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g}\Big)+\sum_{j=1}^{q-1}D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-a_j}\Big)+O(1)\\&=\sum_{j=1}^{q-1}C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-a_j}\Big)+C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)\\&\quad-C_{\alpha,\beta}(r,g)+\sum_{j=0}^{q-1}D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-a_j}\Big)+O(1),\end{aligned}$$

其中 $a_0=0$. 引理 2.3 证毕.

引理 2.4 假设 $g(z)$ 是角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内的亚纯函数, z_j $(j=1,2,\ldots,q)$ 是 q $(q\ge 2)$ 个不同的复数. 如果 $z_q=\infty$, $z_j\ne\infty$ $(j=1,2,\ldots,q-1)$, 则有

$$(q-2)S_{\alpha,\beta}(r,g)<\sum_{j=1}^{q-1}C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-z_j}\Big)+C_{\alpha,\beta}(r,g)-\left\{[2C_{\alpha,\beta}(r,g)-C_{\alpha,\beta}(r,g')]+C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)\right\}$$
$$+\sum_{j=0}^{q-1}D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-z_j}\Big)+O(1),$$

其中 $z_0=0$.

证明 如果 $z_q=\infty$, $z_j\ne\infty$ $(j=1,2,\ldots,q-1)$, 假设 $\varphi=g$ 和 $a_j=z_j$ $(j=1,2,\ldots,q-1)$. 根据 $C_{\alpha,\beta}(r,g)$ 的定义, 有

$$C_{\alpha,\beta}(r,\varphi)=C_{\alpha,\beta}(r,g),\quad C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\varphi-a_j}\Big)=C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-z_j}\Big),\quad (j=1,2,\ldots,q-1), \tag{2.8}$$

且

$$C_{\alpha,\beta}\Big(r,\varphi'\Big)-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\varphi'}\Big)=C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big) \tag{2.9}$$

和对每一个 $j=1,2,\dots,q-1$, 有

$$\left|\frac{\varphi'}{\varphi}\right|=\left|\frac{g'}{g}\right|,\quad \left|\frac{\varphi'}{\varphi-a_j}\right|=\left|\frac{g'}{g-z_j}\right|. \tag{2.10}$$

因此, 由 (2.10) 式, 对每一个 $j=1,2,\dots,q-1$, 有

$$D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{\varphi'}{\varphi}\Big)=D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g}\Big),\quad D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{\varphi'}{\varphi-a_j}\Big)=D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-z_j}\Big). \tag{2.11}$$

从而, 由引理 2.3 和 (2.8)-(2.11) 式, 有

$$\begin{aligned}
(q-2)S_{\alpha,\beta}(r,g)&=(q-2)S_{\alpha,\beta}(r,\varphi)\\
&<\sum_{j=1}^{q-1}C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\varphi-a_j}\Big)+C_{\alpha,\beta}(r,\varphi')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{\varphi'}\Big)\\
&\quad-C_{\alpha,\beta}(r,\varphi)+\sum_{j=0}^{q-1}D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{\varphi'}{\varphi-a_j}\Big)+O(1)\\
&=\sum_{j=1}^{q-1}C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-z_j}\Big)+C_{\alpha,\beta}(r,g')-C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)\\
&\quad-C_{\alpha,\beta}(r,g)+\sum_{j=0}^{q-1}D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-z_j}\Big)+O(1)\\
&=\sum_{j=1}^{q-1}C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g-z_j}\Big)+C_{\alpha,\beta}(r,g)\\
&\quad-\Big\{[2C_{\alpha,\beta}(r,g)-C_{\alpha,\beta}(r,g')]+C_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{1}{g'}\Big)\Big\}+\sum_{j=0}^{q-1}D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-z_j}\Big)+O(1),
\end{aligned}$$

其中 $z_0=0$. 引理 2.4 证毕.

定理 1 的证明 假设定理 1 的结论不正确, 即存在两个不同的有限复数 a 和 b, 使得 $\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),g=a)<\rho_1$ 和 $\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),g=b)<\rho_1$ 其中 $\rho_1<\sigma_2(\Omega(\alpha',\beta'),g)=\rho$. 考虑函数

$$G(z)=\frac{g(z)-a}{b-a},$$

则有

$$\sigma_2(\Omega(\alpha,\beta),G)=\sigma_2(\Omega(\alpha,\beta),g) \tag{2.12}$$

和

$$\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),G=0)<\rho_1,\quad \lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),G=1)<\rho_1. \tag{2.13}$$

于是, 由 (2.13) 式, 对充分大的 r, 有

$$n(\Omega((\alpha,\beta),r),G=0)+n(\Omega((\alpha,\beta),r),G=1)<\exp(r^{\rho_1}). \tag{2.14}$$

假设 $a_v=|a_v|e^{i\alpha_v}$ $(v=1,2,\ldots)$ 是方程 $G=0$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内所有零点 (计算重数). 由 $C_{\alpha,\beta}(r,G)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned}C_{\alpha,\beta}(r,G=0)&=2\sum_{1<|a_v|<r}\left(\frac{1}{|a_v|^k}-\frac{|a_v|^k}{r^{2k}}\right)\sin k(\alpha_v-\alpha)\\&\le 2\sum_{1<|a_v|<r}\frac{1}{|a_v|^k}=2\int_1^r\frac{1}{t^k}dn(t)\\&\le 2n(\Omega((\alpha,\beta),r),G=0).\end{aligned}\tag{2.15}$$

类似地, 有

$$C_{\alpha,\beta}(r,G=1)\le 2n(\Omega((\alpha,\beta),r),G=1).\tag{2.16}$$

我们知道, $G(z)$ 满足定理 1 的假设, 并且是解析的, 则有 $C_{\alpha,\beta}(r,G)=0$. 于是由引理 2.4, 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内, 有

$$\begin{aligned}S_{\alpha',\beta'}(r,G)\le S_{\alpha,\beta}(r,G)&<C_{\alpha,\beta}(r,G=0)+C_{\alpha,\beta}(r,G=1)\\&+2D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{G'}{G}\Big)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{G'}{G-1}\Big)+O(1).\end{aligned}\tag{2.17}$$

由引理 2.1 (ii), 有

$$D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{G'}{G}\Big)=O\{\log T(r,G)\},\quad D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{G'}{G-1}\Big)=O\{\log T(r,G)\}.\tag{2.18}$$

因此, 由 (1.2), (1.3), (2.12)–(2.18) 式, 有

$$\rho=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log S_{\alpha',\beta'}(r,G)}{\log r}\le\rho_1<\rho.$$

这是一个矛盾. 定理 1 证毕.

3 定理 2 的证明

为了证明定理 2, 我们需要这个结果的较弱形式.

引理 3.1 设函数 $g(z)$ 是全平面上的解析函数, 且对闭平面上两个不同的有限复数 a_j $(j=1,2)$, $\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),g=a_j)\le\sigma<+\infty$, 其中 $\sigma>0$. 又设函数 $g(z)$ 满足 (1.3) 式, 则对每一个有限复数 a, 有

$$\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),g=a)\le\sigma.$$

证明 因为对闭平面上两个不同的有限复数 a_j $(j=1,2)$, $\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),g=a_j)\le\sigma<+\infty$, 我们可利用定理 1 类似的证明, 对每一个充分小的 $\varepsilon>0$, 有

$$\sum_{j=1}^{2}C_{\alpha,\beta}(r,g=a_j)\le\exp(r^{\sigma+\varepsilon}).\tag{3.1}$$

而 $g(z)$ 是解析的, 则有 $C_{\alpha,\beta}(r,g)=0$. 于是, 由引理 2.4, 有

$$\begin{aligned}S_{\alpha,\beta}(r,g)&<C_{\alpha,\beta}(r,g=a_1)+C_{\alpha,\beta}(r,g=a_2)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g}\Big)\\&+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-a_1}\Big)+D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-a_2}\Big)+O(1).\end{aligned}\tag{3.2}$$

由引理 2.1 (ii), 有

$$D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g}\Big)=O\{\log T(r,g)\},$$
$$D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-a_1}\Big)=O\{\log T(r,g)\} \tag{3.3}$$
$$D_{\alpha,\beta}\Big(r,\frac{g'}{g-a_2}\Big)=O\{\log T(r,g)\}.$$

另一方面, 对任意有限复数 a, 假设 $a_v=|a_v|e^{i\alpha_v}$ $(v=1,2,\ldots)$ 是方程 $g=a$ 在角域 $\Omega(\alpha,\beta)$ 内零点 (计算重数). 当 $\alpha+\varepsilon<\alpha_v<\beta-\varepsilon$ 和 $k=\frac{\pi}{\beta-\alpha}$ 时, 有

$$k\varepsilon<k(\alpha_v-\alpha)<\pi-k\varepsilon.$$

因此, $\sin k(\alpha_v-\alpha)\geq\sin(k\varepsilon)$. 然而, 由引理 2.1 (i) 和 $S_{\alpha,\beta}(r,g)$ 的定义, 有

$$\begin{aligned}S_{\alpha,\beta}(2r,g)&=S_{\alpha,\beta}\Big(2r,\frac{1}{g-a}\Big)+O(1)\geq C_{\alpha,\beta}\Big(2r,\frac{1}{g-a}\Big)+O(1)\\&=2\sum_{1<|a_v|<2r}\Big(\frac{1}{|a_v|^k}-\frac{|a_v|^k}{(2r)^{2k}}\Big)\sin k(\alpha_v-\alpha)+O(1)\\&\geq 2\sum_{\substack{1<|a_v|<r\\ \alpha+\varepsilon<\alpha_v<\beta-\varepsilon}}\Big(\frac{1}{|a_v|^k}-\frac{|a_v|^k}{(2r)^{2k}}\Big)\sin(k\varepsilon)+O(1)\\&=2\Big\{\int_1^r\frac{dn(t)}{t^k}-\frac{1}{(2r)^{2k}}\int_1^r t^k dn(t)\Big\}\sin(k\varepsilon)+O(1)\\&=2\sin(k\varepsilon)\Big\{\frac{n(r)}{r^k}+k\int_1^r\frac{n(t)}{t^{1+k}}dt-\frac{r^kn(r)}{(2r)^{2k}}+\frac{k}{(2r)^{2k}}\int_1^r t^{k-1}n(t)dt\Big\}+O(1)\\&\geq\Big(1-\frac{1}{2^{2k}}\Big)\sin(k\varepsilon)\frac{n(r)}{r^k}+O(1),\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中 $n(r)$ 表示 $g(z)=a$ 在角域 $\Omega(\alpha+\varepsilon,\beta-\varepsilon)$ 内零点的个数.
由 (1.3), (3.1)–(3.4) 式及 $\varepsilon>0$ 的任意小, 对所有有限复数 a, 有

$$\lambda_2(\Omega(\alpha,\beta),g=a)\leq\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log S_{\alpha,\beta}(r,g)}{\log r}\leq\sigma.$$

引理 3.1 证毕.

定理 2 的证明 假设对任意的 $\alpha'\leq\theta\leq\beta'$, 不存在射线 $\arg z=\theta$ 是函数 $g(z)$ 的超级为 $\sigma_2(\Omega(\alpha',\beta'),g)$ 的 Borel 方向, 其中函数 $g(z)$ 满足定理 1 的条件. 因为函数 $g(z)$ 是解析的, 则对上述的每一个 θ, 存在一个正数 δ 和两个有限复数 a_1 和 a_2, 使得

$$\lambda_2(\Omega(\theta-\delta,\theta+\delta),g=a_j)\leq\rho(\theta)<\sigma_2(\Omega(\alpha',\beta'),g),\quad j=1,2.$$

由引理 3.1, 对所有有限复数 a, 有

$$\lambda_2(\Omega(\theta-\delta,\theta+\delta),g=a)\leq\rho(\theta)<\sigma_2(\Omega(\alpha',\beta'),g),$$

应用 Heine–Borel 定理, 在区间 $\alpha'\leq\theta\leq\beta'$ 内, 存在有限个 $\theta's$, 即 $\theta_1,\theta_2,\cdot,\theta_N$, 使得相应的区间 $(\theta_j-\delta_j,\theta_j+\delta_j)$ 覆盖 (α',β'). 由此, 对所有有限复数 a, 有

$$\lambda_2(\Omega,g=a)\leq\rho'=\max_{j=1,2,\ldots,N}\rho(\theta_j)<\sigma_2(\Omega(\alpha',\beta'),g),$$

其中
$$\Omega=\bigcup_{j=1}^{N}\Omega(\theta_j-\delta_j,\theta_j+\delta_j).$$
显然 $\Omega(\alpha',\beta')\subset\Omega$. 如果我们用 Ω 代替 $\Omega(\alpha,\beta)$, 则上述结果与定理 1 矛盾. 定理 2 证毕.

4 定理 3 的证明

为了证明定理 3, 我们需要一些准备知识.

假设函数 $g(z)$ 解析, 则 $g(z)$ 具有幂级数展式
$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n,\quad (0\le|z|<\infty).$$
现在, 定义 $g(z)$ 的最大项和中心指标分别为 $\mu(r)$ 和 $\nu(r)$, 即
$$\mu(r)=\max_{n\ge0}\{|a_n|r^n\}\ \text{ 和 }\ \nu(r)=\max\{m:\mu(r)=|a_m|r^m\}.$$
令 $a=\max_{n\ge0}\{|a_n|\}$, 则有 $|a_n|r^n\le\mu(r)\le ar^{\nu(r)}$.

引理 4.1 (见文 [8, 18 页]) 假设函数 $g(z)$ 解析, 则对每一个 $r<R$ 和 $\mu(r)>1$, 有
$$M(r,g)\le\mu(r)\{1+\log M(R,g)\}\frac{2R}{R-r}.$$

另一方面, 在引理 4.1 的假设下, 对所有的 $0\le r<R$, 有
$$T(r,g)\le\log M(r,g)\le\frac{R+r}{R-r}T(R,g).$$
结合引理 4.1, 并令 $R=2r$, 则有
$$\begin{aligned}T(r,g)&\le\log\mu(r)+\log\log M(2r,g)+O(1)\\&\le\nu(r)\log r+\log T(4r,g)+O(1).\end{aligned}\tag{4.1}$$

现在, 假设 $A(z)$ 是复平面上超级为 $\sigma_2(A)=0$ 的无穷级整函数, f_1 和 f_2 是方程 (1.1) 两个线性无关的解. 令 $E=f_1f_2$. Bank 和 Laine 在文 [3, 9] 证明了
$$E^2=c^2\left(\left(\frac{E'}{E}\right)^2+2\left(\frac{E''}{E}\right)-4A\right)^{-1},\tag{4.2}$$
其中 $c\neq0$ 是 f_1 和 f_2 的 Wronskian 行列式. 利用文 [6] 类似的方法, 可以证明定理 3.

定理 3 的证明 假设 $f(z)$ 是方程 (1.1) 的非平凡解, 则有
$$\frac{f''}{f}=-A(z).\tag{4.3}$$

对 (4.3) 式应用 Wiman–Valiron 理论, 则存在一个具有有限对数测度的集合 $D\subset[0,+\infty)$, 使得当 $r\notin D$ 时, 对 $|z|=r$ 上满足 $|f(z)|=M(r,f)$ 的点 z, 有
$$\left|\frac{f''}{f}\right|=\left(\frac{\nu(r)}{r}\right)^2(1+o(1))=|A(z)|\le M(r,A),\tag{4.4}$$
其中 $\nu(r)$ 表示 $f(z)$ 的中心指标. 因 f 满足引理 4.1 的条件, 则由 (4.1) 和 (4.4) 式, 有
$$\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log T(r,f)}{\log r}\le\sigma_2(A).\tag{4.5}$$

设 f_1 和 f_2 是方程 (1.1) 的两个线性无关的解, 并令 $E=f_1f_2$. 于是, 由 (4.5) 式, 有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\log T(r,E)}{\log r}\leq\sigma_2(A). \tag{4.6}$$

因此, 对充分小的 $\varepsilon>0$, 由引理 2.1 (ii) 并令 $R=2r$, 有

$$\begin{aligned}A_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\left(r,\frac{E'}{E}\right) &\leq K\int_1^{2r}\frac{\log T(t,E)}{t^{1+k}}dt+O(1)\\ &\leq K\int_1^{2r}\frac{\exp(t^{\sigma_2(A)+\varepsilon})}{t^{1+\frac{\pi}{2\varepsilon}}}dt+O(1)\\ &\leq K\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon}),\end{aligned}$$

其中 $K>0$ 是某常数. 又因为

$$m\Big(r,\frac{E'}{E}\Big)\leq K\left(\log T(2r,E)+\log r\right)\leq K\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon}).$$

由此, 由引理 2.1 (ii), 有

$$B_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\left(r,\frac{E'}{E}\right)\leq K\big\{\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon})\big\}.$$

从而

$$D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\left(r,\frac{E'}{E}\right)\leq K\big\{\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon})\big\}. \tag{4.7}$$

同样地

$$D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\Big(r,\frac{E''}{E}\Big)\leq D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\Big(r,\frac{E'}{E}\Big)+D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\Big(r,\frac{E''}{E'}\Big)\leq K\big\{\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon})\big\}. \tag{4.8}$$

对 f, 由 (4.5) 式, 使用上面类似的方法, 有

$$D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\Big(r,\frac{f'}{f}\Big)\leq K\big\{\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon})\big\}\quad 和\quad D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\Big(r,\frac{f''}{f'}\Big)\leq K\big\{\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon})\big\},$$

从而

$$D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\Big(r,\frac{f''}{f}\Big)\leq K\big\{\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon})\big\}.$$

因此, 由 (4.3) 式, 对充分小的 $\varepsilon>0$ 和对所有的 $\theta\in\mathbf{R}$, 有

$$D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,A)=D_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\Big(r,\frac{f''}{f}\Big)\leq K\big\{\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon})\big\}. \tag{4.9}$$

从而, 由 (4.2), (4.7)–(4.9) 式, 对充分小的 $\varepsilon>0$, 有

$$S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r,E)\leq K\left\{\overline{C}_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\left(r,\frac{1}{E}\right)+\exp((2r)^{\sigma_2(A)+\varepsilon})\right\}. \tag{4.10}$$

充分性. 假设存在 $\theta\in\mathbf{R}$ 满足对任意给定的 $\varepsilon>0$, 使得

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log\log M(\Omega((\theta-\frac{\varepsilon}{3},\theta+\frac{\varepsilon}{3}),r),E)}{\log r}=\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log S_{\theta-\frac{\varepsilon}{3},\theta+\frac{\varepsilon}{3}}(r,E)}{\log r}=+\infty.$$

结合 (4.6) 式及定理 3 的条件 $\sigma_2(A)=0$, E 满足 (1.3) 式, 从而 E 满足定理 1 的条件. 于是, 由定理 1, 存在一个有限复数 a, 使得

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log n(\Omega((\theta-\frac{2\varepsilon}{3},\theta+\frac{2\varepsilon}{3}),r),E=a)}{\log r}=+\infty. \tag{4.11}$$

由 (4.11) 式可知, 存在实数序列 $\{r_n\}$, 其中 $r_n \to +\infty$ $(n \to +\infty)$, 使得对上面的 $\varepsilon > 0$, 对充分大的 n 和对任意的 $M(M > \frac{\pi}{2\varepsilon})$, 有

$$n\left(\Omega\left(\left(\theta - \frac{2\varepsilon}{3}, \theta + \frac{2\varepsilon}{3}\right), r_n\right), E = a\right) \geq \exp({r_n}^M).$$

设 $a_v = |a_v|e^{i\alpha_v}$ $(v = 1, 2, \ldots)$ 是方程 $E = a$ 在角域 $\Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon)$ 内的零点. 为计算 $\rho_2(\Omega(\theta - \varepsilon, \theta + \varepsilon), E)$, 我们首先考虑当 $\theta - \frac{2\varepsilon}{3} < \alpha_v < \theta + \frac{2\varepsilon}{3}$ 和 $k = \frac{\pi}{2\varepsilon}$ 时, 有

$$k \cdot \frac{\varepsilon}{3} < k(\alpha_v - \theta + \varepsilon) < \pi - k \cdot \frac{\varepsilon}{3}.$$

由此, 有

$$\sin k(\alpha_v - \theta + \varepsilon) \geq \sin\left(k \cdot \frac{\varepsilon}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}. \tag{4.12}$$

进一步地, 我们有下面的 Stieltjes 积分

$$\sum\left(\frac{1}{|a_v|^k} - \frac{|a_v|^k}{(2r_n)^{2k}}\right) = \sum\frac{1}{|a_v|^k} - \sum\frac{|a_v|^k}{(2r_n)^{2k}} = \int_1^{r_n}\frac{dn(t)}{t^k} - \frac{1}{(2r_n)^{2k}}\int_1^{r_n} t^k dn(t),$$

其中

$$n(t) = n\left(\Omega\left(\left(\theta - \frac{2\varepsilon}{3}, \theta + \frac{2\varepsilon}{3}\right), t\right), E = a\right).$$

应用引理 2.1 (i), (4.12) 式和上面的 Stieltjes 积分, 有

$$\begin{aligned}
S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(2r_n, E) &= S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\left(2r_n, \frac{1}{E-a}\right) + O(1) \geq C_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}\left(2r_n, \frac{1}{E-a}\right) + O(1) \\
&= 2\sum_{1<|a_v|<2r_n}\left(\frac{1}{|a_v|^k} - \frac{|a_v|^k}{(2r_n)^{2k}}\right)\sin k(\alpha_v - \theta + \varepsilon) + O(1) \\
&\geq 2\sum_{\substack{1<|a_v|<r_n \\ \theta-\frac{2\varepsilon}{3}<\alpha_v<\theta+\frac{2\varepsilon}{3}}}\left(\frac{1}{|a_v|^k} - \frac{|a_v|^k}{(2r_n)^{2k}}\right)\sin\left(k \cdot \frac{\varepsilon}{3}\right) + O(1) \\
&= 2\left\{\int_1^{r_n}\frac{dn(t)}{t^k} - \frac{1}{(2r_n)^{2k}}\int_1^{r_n} t^k dn(t)\right\}\sin\frac{\pi}{6} + O(1) \\
&= \left\{\frac{n(r_n)}{r_n^k} + k\int_1^{r_n}\frac{n(t)}{t^{1+k}}dt - \frac{r_n^k n(r_n)}{(2r_n)^{2k}} + \frac{k}{(2r_n)^{2k}}\int_1^{r_n} t^{k-1}n(t)dt\right\} + O(1) \\
&\geq \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)\frac{n(r_n)}{r_n^k} + O(1) \geq \exp(r_n^{M-\varepsilon}).
\end{aligned} \tag{4.13}$$

因此, 有

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\log\log S_{\theta-\varepsilon,\theta+\varepsilon}(r, E)}{\log r} \geq M - \varepsilon.$$

因为 $\varepsilon > 0$ 是任意小, $M > 0$ 是任意大, 由 (4.10) 式及 $\sigma_2(A) = 0$, 有 $\lambda_{2,\theta}(E) = +\infty$.

必要性. 假设 $\lambda_{2,\theta_0}(E) = +\infty$. 类似于 (4.13) 式的证明, 有

$$S_{\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon}(2r, E) \geq \left(1 - \frac{1}{2^{2k}}\right)\frac{n(r)}{r^k} + O(1), \tag{4.14}$$

其中

$$n(r) = n\left(\Omega\left(\left(\theta_0 - \frac{2\varepsilon}{3}, \theta_0 + \frac{2\varepsilon}{3}\right), t\right), E = a\right), \quad k = \frac{\pi}{2\varepsilon}.$$

又由最大模定理, 有

$$
\begin{aligned}
S_{\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon}(2r,E) &= A_{\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon}(2r,E)+B_{\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon}(2r,E)\\
&=\frac{k}{\pi}\int_1^r\left(\frac{1}{t^k}-\frac{t^k}{r^{2k}}\right)\left\{\log^+|E(te^{\mathrm{i}(\theta_0-\varepsilon)})|+\log^+|E(te^{\mathrm{i}(\theta_0+\varepsilon)})|\right\}\frac{dt}{t}\\
&\quad+\frac{2k}{\pi r^k}\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon}\log^+|g(re^{\mathrm{i}\theta})|\sin k(\theta-\theta_0+\varepsilon)d\theta\\
&\le \log^+ M(\Omega((\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon),r),E)\left\{\frac{2k}{\pi}\int_1^r\frac{1}{t^{k+1}}dt+\frac{2k}{\pi r^k}\int_{\theta_0-\varepsilon}^{\theta_0+\varepsilon}d\theta\right\}\\
&\le 2\log^+ M(\Omega((\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon),r),E),
\end{aligned}\tag{4.15}
$$

其中 $k=\frac{\pi}{2\varepsilon}, r\ge 1$. 因此, 由 (4.14) 和 (4.15) 式, 有

$$
\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log\log M(\Omega((\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon),r),E)}{\log r}=\overline{\lim_{r\to\infty}}\frac{\log\log S_{\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon}(r,E)}{\log r}=+\infty.
$$

定理 3 证毕.

5 定理 4 的证明

为证明定理 4, 我们需要一些准备知识.

定义 5.1[13] 设函数 $g(z)$ 是超级为 ρ $(0<\rho\le+\infty)$ 的整函数, 射线 $L:\arg z=\theta_0$ $(0\le\theta_0<2\pi)$ 称为方程 $g=a$ 超级为 $\lambda_{2,\theta_0}(g)$ 的零点聚值线, 如果对任意小的正数 ε, 有

$$
\overline{\lim_{r\to+\infty}}\frac{\log\log n(\Omega((\theta_0-\varepsilon,\ \theta_0+\varepsilon),r),\ g=a)}{\log r}=\lambda_{2,\theta_0}(g).
$$

类似于文 [2] 中定理 3.11 的证明, 有

引理 5.1 设函数 $g(z)$ 是复平面上超级为 ρ $(0<\rho\le+\infty)$ 的亚纯函数, 如果射线

$$
B:\arg z=\theta_0,\quad (0\le\theta_0<2\pi),
$$

是函数 $g(z)$ 超级为 ρ 的 Borel 方向, 则存在函数 $g(z)$ 的超级为 ρ 的一列充满圆 Γ_j, 使得

$$
\Gamma_j:|z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|,\quad z_j=|z_j|e^{\mathrm{i}\theta_0},\quad \lim_{j\to+\infty}|z_j|=+\infty,\quad \lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j=0,\quad j=1,2,\dots,
$$

且 $g(z)$ 在 Γ_j 内取每个复数 a 至少 $n_j\ge\exp\{|z_j|^{\rho_j}\}$ 次, 至多除去一些能被黎曼曲面上半径为 $\exp\{-n_j\}$ 的两个圆覆盖的复数, 其中 $\rho_j\to\rho$ $(j\to+\infty)$.

引理 5.1 中的一列圆 Γ_j 称为函数 $g(z)$ 的超级为 ρ 的充满圆.

定理 4 的证明 由定理 4 的条件知, $\sigma_2(E)=+\infty$.

必要性. 假设射线 $\arg z=\theta_0$ 是函数 E 的超级为 $\rho=+\infty$ 的 Borel 方向. 下面我们证明射线 $\arg z=\theta_0$ 是函数 E 的超级为 $\rho=+\infty$ 的零点聚值线.

由引理 5.1, 存在函数 E 的超级为 $\rho=+\infty$ 的一列充满圆 Γ_j, 使得

$$
\Gamma_j:|z-z_j|<\varepsilon_j|z_j|,\quad z_j=|z_j|e^{\mathrm{i}\theta_0},\quad \lim_{j\to+\infty}|z_j|=+\infty,\quad \lim_{j\to+\infty}\varepsilon_j=0,\quad j=1,2,\dots,
$$

且 $g(z)$ 在 Γ_j 内取每个复数 a 至少 $n_j\ge\exp\{|z_j|^{\rho_j}\}$ 次, 至多除去一些能被黎曼曲面上半径为 $\exp\{-n_j\}$ 的两个圆覆盖的复数, 其中 $\rho_j\to\rho$, $(j\to+\infty)$.

对任给的 $\varepsilon > 0$ 和充分大的 j, 有

$$\Gamma_j \subset \Omega_\varepsilon(\theta_0 - \varepsilon, \theta_0 + \varepsilon).$$

注意到 $E(z)$ 是整函数, ∞ 是其一个 Picard 例外值. 因此, ∞ 位于上述某一个除外圆中. 规定 z_1, z_2 的球面距离为 $|z_1, z_2|$, 则对充分大的 j, 可以找到一点 $a_j \in \Gamma_j$, 使得

$$|E(a_j), \infty| = \frac{1}{(1+|E(a_j)|^2)^{\frac{1}{2}}} \le 2\exp\{-n_j\}.$$

因此, 可以找到一个不依赖于 j 的正常数 c, 使得对所有充分大的 j, 有

$$|E(a_j)| > c\exp\{n_j\} \ge c\exp\{\exp(|z_j|^{\rho_j})\}.$$

记 $|a_j| = (1+o(1))|z_j|$. 于是

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(\Omega((\theta_0-\varepsilon, \theta_0+\varepsilon), r) \cap \overline{D}(0,r), E)}{\log r} = +\infty,$$

其中 $\overline{D}(0,r) = \{z; |z| \le r\}$.

结合定理 4 的假设, 由定理 3, $\lambda_{2,\theta_0}(E) = +\infty$. 即射线 $\arg z = \theta_0$ 是函数 E 的超级为 $+\infty$ 的零点聚值线.

充分性. 假设射线 $\arg z = \theta_0$, 使得 $\lambda_{2,\theta_0}(E) = +\infty$, 则由定理 3, 对充分小的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log\log M(\Omega((\theta_0-\varepsilon, \theta_0+\varepsilon), r), E)}{\log r} = \overline{\lim_{r\to+\infty}} \frac{\log\log S_{\theta_0-\varepsilon,\theta_0+\varepsilon}(r, E)}{\log r} = +\infty.$$

又由定理 3 的证明过程可知, E 满足 (1.3) 式. 因此, 由定理 2, $E(z)$ 在角域 $\Omega(\theta_0-\varepsilon, \theta_0+\varepsilon)$ 具有超级为 $+\infty$ 的 Borel 方向. 又因为 ε 是任意的, 射线 $\arg z = \theta_0$ 就是 $E(z)$ 的超级为 $+\infty$ 的 Borel 方向. 定理 4 证毕.

参 考 文 献

[1] Hayman W. K., Meromorphic function, Oxford, 1964.

[2] Yang L., Value distribution theory and its new researches, Beijing: Beijing Science Press, 1992 (in Chinese).

[3] Gao S. A., Chen Z. X., Chen T. W., Oscillation theory of linear differential equation, Wuhan: Huazhong University of Science and Technology Press, 1998 (in Chinese).

[4] Goldberg A. A., Ostrovskii I. V., The distribution of values of meromorphic functions, Moscow: Izdat Nauk Moscow, 1970 (in Russian).

[5] Nevanlinna R., Uber die Eigenschaften meromorpher funktionen in einem winkelraum, *Acta Soc. Sci. Fenn.*, 1925, **50**: 1–45.

[6] Wu S. J., on the location of zeros of solutions of $f'' + A(z)f = 0$, where $A(z)$ is entire, *Math. Scand*, 1994, **74**: 293–312.

[7] Wu S. J., Angular distribution in complex oscillation theory, *Science in China, Series A*, 2005, **48**(1): 107–114.

[8] He Y. Z., Xiao X. Z., Algebroid functions and ordinary differential equations, Beijing: Beijing Science Press, 1998 (in Chinese).

[9] Bank S., Laine I., On the oscillation theory of $f'' + Af = 0$ where A is entire, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1982, **273**: 351–363.

[10] Yi C. F., The angular distribution of the solutions of higher order differential equation, *Acta Mathematica Sinica, Chinese Series*, 2005, **48**(1): 133–140.

[11] Wang S. P., On the sectorial oscillation theory of $f'' + A(z)f = 0$ (Mathematica dissertations), 1994.

[12] Hayman W. K., Yang L., Growth and values of functions regular in an angular, *Proc. London Math. Soc.*, 1982, **44**(3): 193–214.

[13] Yang L., Yang C. C., Angular distribution of values of ff', *Science in China, Series A*, 1994, **37**(3): 284–294.