第66卷第5期 数学学报中文版 Vol.66, No.5
2023年9月 ACTA MATHEMATICA SINICA, CHINESE SERIES Sep., 2023

DOI: 10.12386/A20220020 文献标识码: A

二阶线性差分方程亚纯解的唯一性

张然然

广东第二师范学院数学学院 广州 510303
E-mail: zhangranran@gdei.edu.cn

黄志波

华南师范大学数学科学学院 广州 510631
E-mail: huangzhibo@scnu.edu.cn

陈创鑫

仲恺农业工程学院数学与数据科学学院 广州 510225
E-mail: chenchxin@126.com

摘　要　本文考虑二阶线性差分方程 $p_2(z)y(z+2)+p_1(z)y(z+1)+p_0(z)y(z)=0$ 的亚纯解 $f(z)$ 的唯一性, 其中 $p_2(z),p_1(z),p_0(z)$ 是非零多项式, 且满足 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\not\equiv 0$. 在 $f(z)$ 与任一亚纯函数 $g(z)$ CM 分担 $0,1,\infty$ 的假设下, 给出了 $f(z)$ 的具体形式. 如果 $g(z)$ 也是方程的解, 得到了该方程的精确形式. 作为推论, 如果亚纯函数 $g(z)$ 与 gamma 函数 $\Gamma(z)$ CM 分担 $0,1,\infty$, 则 $g(z)\equiv\Gamma(z)$.

关键词　亚纯函数; 差分方程; 唯一性
MR(2010) 主题分类　30D35
中图分类　O174.5

Uniqueness for Meromorphic Solutions of Second Order Linear Difference Equations

Ran Ran ZHANG

School of Mathematics, Guangdong University of Education, Guangzhou 510303, P. R. China
E-mail: zhangranran@gdei.edu.cn

Zhi Bo HUANG

School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, P. R. China
E-mail: huangzhibo@scnu.edu.cn

Chuang Xin CHEN

College of Mathematics and Data Science, Zhongkai University of Agriculture and Engineering, Guangzhou 510225, P. R. China
E-mail: chenchxin@126.com

收稿日期: 2022-02-12; 接受日期: 2022-05-16
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11801093, 11871260);
广东省自然科学基金 (2018A030313508) 及广东省普通高校特色创新类项目 (2019KTSCX119)
通讯作者: 黄志波

Abstract We consider the uniqueness of the meromorphic solution $f(z)$ of the second order linear difference equation $p_2(z)y(z+2)+p_1(z)y(z+1)+p_0(z)y(z)=0$, where $p_2(z), p_1(z), p_0(z)$ are nonzero polynomials with $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\not\equiv 0$. We give the forms of $f(z)$ if $f(z)$ shares $0, 1, \infty$ CM with any meromorphic function $g(z)$. Furthermore, if $g(z)$ is also a solution of the above equation, we obtain the exact forms of this equation. As a corollary, we see that if a meromorphic function $g(z)$ shares $0, 1, \infty$ CM with the gamma function $\Gamma(z)$, then $g(z)\equiv\Gamma(z)$.

Keywords meromorphic function; difference equation; uniqueness
MR(2010) Subject Classification 30D35
Chinese Library Classification O174.5

1 引言

复常微分方程的解是复的解析函数, 故人们用复变函数的一般理论直接从方程本身出发研究解的性质. 亚纯函数的唯一性理论主要研究只存在一个函数的条件. 1989 年, Brosch 从唯一性的角度研究了复微分方程的解, 并在他的博士论文中证明了以下定理.

定理 1.1 [3] 假设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 为非常数亚纯函数, 且 CM 分担 3 个不同值 $c_j\,(j=1,2,3)$, 且 f 满足微分方程

$$(f')^n=\sum_{j=0}^{2n}a_jf^j=P(z,f),$$

其中 n 是一个正整数, $a_j\,(j=0,1,\ldots,2n)$ 是亚纯函数且满足

$$\sum_{j=0}^{2n}T(r,a_j)=S(r,f),\quad a_{2n}\not\equiv 0.$$

如果 $P(z,c_j)\not\equiv 0\ (j=1,2,3)$, 那么 $f(z)\equiv g(z)$.

Nevanlinna 五值定理是: 如果 2 个亚纯函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中 IM 分担五个不同的值, 则 $f(z)\equiv g(z)$. 类似地, Nevanlinna 四值定理是说: 如果 $f(z)$ 和 $g(z)$ 在 $\widehat{\mathbb{C}}$ 中 CM 分担四个不同的值, 那么 $f(z)\equiv g(z)$ 或 $f(z)$ 是 $g(z)$ 的 Möbius 变换. Gundersen [10], Mues [19] 和 Wang [21] 分别独立地将 "4CM" 推广到 "2CM+2IM". 但 "1CM+3IM=4CM" 是否成立仍然悬而未决. 对于特殊的超越亚纯函数, 可以从定理 1.1 得出以下结果 (文 [22, 307页]), 这部分说明了研究微分方程解的唯一性的意义.

定理 1.2 [22] 假设 $f(z)$ 为非常数亚纯函数, $c_j\ (j=1,2,3)$ 为三个不同复常数且满足 $c_j\neq\pm i\ (j=1,2,3)$. 如果 $f(z)$ 和 $\tan(z)$ CM 分担 $c_j\ (j=1,2,3)$, 那么 $f(z)\equiv\tan(z)$.

最近, 复差分和差分方程受到了很多关注 (文献 [1, 2, 4–8, 11, 12, 14–18, 24]). 线性差分方程是一类重要的方程. 一些特殊函数, 如 gamma 函数, 满足线性差分方程, 并且一些重要的差分方程, 如 Riccati 差分方程, 可以转化为线性差分方程. 许多作者研究了线性差分方程, 如 Chen [6], Chiang 和 Feng [7], Ishizaki 和 Yanagihara [16]. 他们主要讨论了线性差分方程的解的增长性、极点和值分布. Halburd 和 Korhonen [12] 研究了二阶差分方程

$$w(z+1)+w(z-1)=R(z,w(z))$$

的可积性, 其中 $R(z,w(z))$ 是关于 $w(z)$ 的有理函数, 系数为亚纯函数. 他们得到了这个方程的退化形式, 其中包括二阶线性差分方程.

本文从唯一性的角度研究二阶线性差分方程

$$p_2(z)y(z+2)+p_1(z)y(z+1)+p_0(z)y(z)=0 \tag{1.1}$$

的解. 第二部分研究 (1.1) 的一个解与任一亚纯函数 CM 分担三个值的情形, 给出了解的具体形式. 第三部分讨论 (1.1) 的两个解 CM 分担三个值的情形, 给出了方程 (1.1) 的精确形式.

2 方程的一个解与任一亚纯函数 CM 分担三个值

定理 2.1 令 $p_2(z),p_1(z),p_0(z)$ 为非零多项式且满足 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\not\equiv 0$. 假设 $f(z)$ 是差分方程 (1.1) 的有限级超越亚纯解. 如果亚纯函数 $g(z)$ 与 $f(z)$ CM 分担 $0,1,\infty$, 则以下情况之一必成立:

(i) $f(z)\equiv g(z)$;

(ii) $f(z)=\frac{1}{A}\mathrm{e}^{-b_1z}$ 且 $g(z)=A\mathrm{e}^{b_1z}$, 其中 b_1,A 是非零常数;

(iii) $f(z)=\pm\frac{1}{A}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}b_1z}-\frac{1}{A^2}\mathrm{e}^{-b_1z}$ 且 $g(z)=\pm A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b_1z}-A^2\mathrm{e}^{b_1z}$, 其中 b_1,A 是非零常数.

注 2.2 对于差分方程 (1.1) 的解 $f(z)$, 要么 $f(z)$ 由其极点和两个不同的值唯一确定, 要么 $f(z)$ 满足 (ii) 或 (iii). 可见, 满足线性差分方程 (1.1) 的一些特殊函数由三个不同的值唯一确定, 由此可以得到类似于定理 1.2 的结果. 例如, gamma 函数 $\Gamma(z)$ 满足差分方程

$$y(z+2)-y(z+1)-z^2y(z)=0.$$

我们很容易从定理 2.1 得到以下推论.

推论 2.3 令 $g(z)$ 为非常数亚纯函数. 如果 $g(z)$ 和 $\Gamma(z)$ CM 分担 $0,1,\infty$, 则 $g(z)\equiv\Gamma(z)$.

本文假设读者熟悉 Nevanlinna 值分布理论中的基本结果和标准符号, 见文献 [13, 23]. 此外, 使用符号 $\sigma(f)$ 表示亚纯函数 $f(z)$ 的增长级. 为了证明定理 2.1, 我们需要下列引理.

引理 2.4 [22] 令 f 和 g 为非常数亚纯函数. 如果 f 和 g IM 分担 3 个不同的值 a_1,a_2 和 a_3, 则 f 和 g 的级相同.

引理 2.5 [9, 22] 令 $n\geq 2$, $f_1(z),\dots,f_n(z)$ 为亚纯函数, $g_1(z),\dots,g_n(z)$ 为整函数且满足:

(i) $\sum_{j=1}^{n}f_j(z)\exp\{g_j(z)\}=0$;

(ii) 对于 $1\leq j<k\leq n$, $g_j(z)-g_k(z)$ 不是常数;

(iii) 对于 $1\leq j\leq n$, $1\leq h<k\leq n$, 有

$$T(r,f_j)=o\{T(r,\exp\{g_h-g_k\})\}\quad (r\to\infty,\ r\notin E),$$

这里 $E\subset(1,\infty)$ 有有限线测度或有限对数测度, 则 $f_j(z)\equiv 0,\ j=1,\dots,n$.

定理 2.1 的证明 已知 $g(z)$ 和 $f(z)$ CM 分担 $0,1,\infty$, 故

$$\frac{g(z)}{f(z)}=\mathrm{e}^{\alpha(z)}, \tag{2.1}$$

$$\frac{g(z)-1}{f(z)-1}=\mathrm{e}^{\beta(z)}, \tag{2.2}$$

其中 $\alpha(z)$ 和 $\beta(z)$ 是多项式. 由引理 2.4 可知 $\sigma(f)=\sigma(g)<\infty$.

假设 $f(z)\not\equiv g(z)$, 我们将证明 (ii) 或 (iii) 成立.

为了简便, 将 $\alpha(z+2),\alpha(z+1),\alpha(z)$ 分别记为 $\bar{\bar{\alpha}},\bar{\alpha},\alpha$; $\beta(z+2),\beta(z+1),\beta(z)$ 分别记为 $\bar{\bar{\beta}},\bar{\beta},\beta$. 由 $f(z)\not\equiv g(z)$ 可知 $\mathrm{e}^{\alpha}\not\equiv 1$, $\mathrm{e}^{\beta}\not\equiv 1$ 以及 $\mathrm{e}^{\beta-\alpha}\not\equiv 1$. 因此由 (2.1) 和 (2.2) 可以得到

$$f(z)=\frac{1-\mathrm{e}^{\beta}}{\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\beta}}. \tag{2.3}$$

将 (2.3) 代入方程 (1.1), 可得

$$p_2(z)\frac{1-\mathrm{e}^{\bar{\bar{\beta}}}}{\mathrm{e}^{\bar{\bar{\alpha}}}-\mathrm{e}^{\bar{\bar{\beta}}}}+p_1(z)\frac{1-\mathrm{e}^{\bar{\beta}}}{\mathrm{e}^{\bar{\alpha}}-\mathrm{e}^{\bar{\beta}}}+p_0(z)\frac{1-\mathrm{e}^{\beta}}{\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\beta}}=0.$$

由此得出

$$\begin{aligned}
&p_2(z)(\mathrm{e}^{\alpha+\bar{\alpha}}-\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\beta}-\mathrm{e}^{\alpha+\bar{\beta}}+\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}}-\mathrm{e}^{\alpha+\bar{\alpha}+\bar{\bar{\beta}}}+\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\beta+\bar{\bar{\beta}}}+\mathrm{e}^{\alpha+\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}}-\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}})\\
&\quad+p_1(z)(\mathrm{e}^{\alpha+\bar{\bar{\alpha}}}-\mathrm{e}^{\bar{\bar{\alpha}}+\beta}-\mathrm{e}^{\alpha+\bar{\bar{\beta}}}+\mathrm{e}^{\beta+\bar{\bar{\beta}}}-\mathrm{e}^{\alpha+\bar{\bar{\alpha}}+\bar{\beta}}+\mathrm{e}^{\bar{\bar{\alpha}}+\beta+\bar{\beta}}+\mathrm{e}^{\alpha+\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}}-\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}})\\
&\quad+p_0(z)(\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\alpha}}}-\mathrm{e}^{\bar{\bar{\alpha}}+\bar{\beta}}-\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\beta}}}+\mathrm{e}^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}}-\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\alpha}}+\beta}+\mathrm{e}^{\bar{\bar{\alpha}}+\beta+\bar{\beta}}+\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\beta+\bar{\bar{\beta}}}-\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}})=0.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

我们断言 $\deg\alpha=\deg\beta$. 否则, 假设 $\deg\alpha<\deg\beta$, 将 (2.4) 写成

$$-(p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))\mathrm{e}^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}\mathrm{e}^{3\beta}+w_{11}\mathrm{e}^{2\beta}+w_{12}\mathrm{e}^{\beta}+w_{13}=0,$$

其中系数 $(p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))\mathrm{e}^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}$ 和 w_{1j} $(j=1,2,3)$ 都是 e^{β} 的小函数. 由假设 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\not\equiv 0$ 以及引理 2.5 得到矛盾.

假设 $\deg\alpha>\deg\beta$, 将 (2.4) 写成

$$w_{21}\mathrm{e}^{2\alpha}+w_{22}\mathrm{e}^{\alpha}+w_{23}=0,$$

其中

$$w_{23}=p_2(z)(\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}}-\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}})+p_1(z)(\mathrm{e}^{\beta+\bar{\bar{\beta}}}-\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}})+p_0(z)(\mathrm{e}^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}}-\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}}), \tag{2.5}$$

且所有系数 w_{2j} $(j=1,2,3)$ 都是 e^{α} 的小函数. 由引理 2.5, 得到

$$w_{21}\equiv w_{22}\equiv w_{23}\equiv 0.$$

如果 β 是常数, 则由 (2.5) 可知

$$\mathrm{e}^{2\beta}(1-\mathrm{e}^{\beta})(p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))\equiv 0.$$

由此得到 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 与假设矛盾.

如果 β 不是常数, 则将 (2.5) 写成

$$-(p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))\mathrm{e}^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}\mathrm{e}^{3\beta}+w_{31}\mathrm{e}^{2\beta}\equiv 0,$$

其中所有的系数都是 e^{β} 的小函数. 由引理 2.5 仍然可以得到矛盾. 因此证明了 $\deg\alpha=\deg\beta$.

由于 $f(z)$ 是超越的, 由 (2.3) 可知 α 和 β 不能同时为常数. 因此 $\deg\alpha=\deg\beta\geq 1$. 令

$$\begin{aligned}
\alpha&=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_0,\\
\beta&=b_nz^n+b_{n-1}z^{n-1}+\cdots+b_0,
\end{aligned} \tag{2.6}$$

其中 $a_nb_n\neq 0$, $n=\deg\alpha=\deg\beta$ 是正整数.

将 (2.4) 写成

$$w_{41}\mathrm{e}^{2\alpha}+w_{42}\mathrm{e}^{\alpha+\beta}+w_{43}\mathrm{e}^{2\beta}+w_{44}\mathrm{e}^{2\alpha+\beta}+w_{45}\mathrm{e}^{\alpha+2\beta}+w_{46}\mathrm{e}^{3\beta}=0, \tag{2.7}$$

其中

$$\begin{aligned}
w_{41} &= p_2(z)e^{\bar{\alpha}-\alpha} + p_1(z)e^{\bar{\bar{\alpha}}-\alpha} + p_0(z)e^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\alpha}}-2\alpha},\\
w_{42} &= -p_2(z)(e^{\bar{\alpha}-\alpha} + e^{\bar{\beta}-\beta}) - p_1(z)(e^{\bar{\bar{\alpha}}-\alpha} + e^{\bar{\bar{\beta}}-\beta}) - p_0(z)(e^{\bar{\bar{\alpha}}+\bar{\beta}-(\alpha+\beta)} + e^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\beta}}-(\alpha+\beta)}),\\
w_{43} &= p_2(z)e^{\bar{\beta}-\beta} + p_1(z)e^{\bar{\bar{\beta}}-\beta} + p_0(z)e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta},\\
w_{44} &= -p_2(z)e^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\beta}}-(\alpha+\beta)} - p_1(z)e^{\bar{\bar{\alpha}}+\bar{\beta}-(\alpha+\beta)} - p_0(z)e^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\alpha}}-2\alpha},\\
w_{45} &= p_2(z)(e^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\beta}}-(\alpha+\beta)} + e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}) + p_1(z)(e^{\bar{\bar{\alpha}}+\bar{\beta}-(\alpha+\beta)} + e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta})\\
&\quad + p_0(z)(e^{\bar{\bar{\alpha}}+\bar{\beta}-(\alpha+\beta)} + e^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\beta}}-(\alpha+\beta)}),\\
w_{46} &= -(p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

为了将引理 2.5 应用于 (2.7), 我们需要讨论 $\alpha+\beta$, $2\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha-2\beta$, $2\alpha-3\beta$ 和 $\beta-2\alpha$ 的次数. 因此将讨论分成 8 种情形.

情形 1 $\deg(\alpha+\beta)=\deg(2\alpha+\beta)=\deg(\alpha+2\beta)=\deg(\alpha-\beta)=\deg(\alpha-2\beta)=\deg(2\alpha-3\beta)=\deg(\beta-2\alpha)=n$.

令 $q_{41}=2\alpha$, $q_{42}=\alpha+\beta$, $q_{43}=2\beta$, $q_{44}=2\alpha+\beta$, $q_{45}=\alpha+2\beta$ 及 $q_{46}=3\beta$, 由 (2.7) 可得

$$w_{41}e^{q_{41}} + w_{42}e^{q_{42}} + w_{43}e^{q_{43}} + w_{44}e^{q_{44}} + w_{45}e^{q_{45}} + w_{46}e^{q_{46}} = 0. \tag{2.9}$$

不难验证, 对于 $1\le j\le 6$, $1\le h<k\le 6$, 有

$$T(r,w_{4j}) = o\{T(r,\exp\{q_{4h}-q_{4k}\})\} \quad (r\to\infty).$$

由 (2.9) 以及引理 2.5, 可知 $w_{46}\equiv 0$. 因此由 (2.8), 得到 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

情形 2 $\deg(\beta-2\alpha)<n$.

由 (2.6) 知 $b_n=2a_n$. 将 (2.7) 写成

$$\begin{aligned}
&w_{41}e^{2a_nz^n+2a_{n-1}z^{n-1}+\cdots} + w_{42}e^{3a_nz^n+(a_{n-1}+b_{n-1})z^{n-1}+\cdots} + w_{43}e^{4a_nz^n+2b_{n-1}z^{n-1}+\cdots}\\
&\quad + w_{44}e^{4a_nz^n+(2a_{n-1}+b_{n-1})z^{n-1}+\cdots} + w_{45}e^{5a_nz^n+(a_{n-1}+2b_{n-1})z^{n-1}+\cdots}\\
&\quad + w_{46}e^{6a_nz^n+3b_{n-1}z^{n-1}+\cdots} = 0.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

令 $w_{51}=w_{41}e^{2a_{n-1}z^{n-1}+\cdots}$, $w_{52}=w_{42}e^{(a_{n-1}+b_{n-1})z^{n-1}+\cdots}$, $w_{53}=w_{43}e^{2b_{n-1}z^{n-1}+\cdots}$, $w_{54}=w_{44}e^{(2a_{n-1}+b_{n-1})z^{n-1}+\cdots}$, $w_{55}=w_{45}e^{(a_{n-1}+2b_{n-1})z^{n-1}+\cdots}$, 并注意到 (2.8), 可以进一步将 (2.10) 写成

$$\begin{aligned}
&w_{51}e^{2a_nz^n} + w_{52}e^{3a_nz^n} + (w_{53}+w_{54})e^{4a_nz^n} + w_{55}e^{5a_nz^n}\\
&\quad - (p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}e^{3b_{n-1}z^{n-1}+\cdots}e^{6a_nz^n} = 0.
\end{aligned} \tag{2.11}$$

不难看出 (2.11) 满足引理 2.5 的条件. 因此 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

情形 3 $\deg(\alpha+\beta)<n$.

情形 4 $\deg(2\alpha+\beta)<n$.

情形 5 $\deg(\alpha+2\beta)<n$.

对以上 3 种情形, 使用与情形 2 类似的证明, 分别将 (2.7) 写成

$$\begin{aligned}
&w_{61}e^{2a_nz^n} + w_{62} + w_{63}e^{-2a_nz^n} + w_{64}e^{a_nz^n} + w_{65}e^{-a_nz^n}\\
&\quad - (p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}e^{3b_{n-1}z^{n-1}+\cdots}e^{-3a_nz^n} = 0,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&w_{71}e^{2a_nz^n}+w_{72}e^{-a_nz^n}+w_{73}e^{-4a_nz^n}+w_{74}+w_{75}e^{-3a_nz^n}\\&\quad-(p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}e^{3b_{n-1}z^{n-1}+\cdots}e^{-6a_nz^n}=0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&w_{81}e^{-4b_nz^n}+w_{82}e^{-b_nz^n}+w_{83}e^{2b_nz^n}+w_{84}e^{-3b_nz^n}+w_{85}\\&\quad-(p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}e^{3b_{n-1}z^{n-1}+\cdots}e^{3b_nz^n}=0.\end{aligned}$$

由引理 2.5 可以得到 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

情形 6 $\deg(\alpha-\beta)<n$.

此时 $a_n=b_n$. 如果 $n=1$, 则

$$\alpha=a_1z+a_0,\quad \beta=a_1z+b_0,$$

其中 $a_1\neq 0$. 因为 $e^{\alpha}\not\equiv e^{\beta}$, 所以 $e^{b_0}\neq e^{a_0}$. 由 (2.3), 得到

$$f(z)=\frac{1}{e^{a_0}-e^{b_0}}(e^{-a_1z}-e^{b_0}).$$

将这个表达式代入 (1.1), 得到

$$(p_2(z)e^{-2a_1}+p_1(z)e^{-a_1}+p_0(z))e^{-a_1z}-(p_2(z)+p_1(z)+p_0(z))e^{b_0}=0,$$

所以 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

接下来讨论 $n\geq 2$ 的情形. 令

$$\begin{aligned}s_1&=p_2(z)(e^{\bar{\alpha}-\alpha}-e^{\bar{\alpha}+\beta-2\alpha}-e^{\bar{\beta}-\alpha}+e^{\beta+\bar{\beta}-2\alpha}),\\s_2&=p_1(z)(e^{\bar{\bar{\alpha}}-\alpha}-e^{\bar{\bar{\alpha}}+\beta-2\alpha}-e^{\bar{\bar{\beta}}-\alpha}+e^{\beta+\bar{\bar{\beta}}-2\alpha}),\\s_3&=p_0(z)(e^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\alpha}}-2\alpha}-e^{\bar{\bar{\alpha}}+\bar{\beta}-2\alpha}-e^{\bar{\alpha}+\bar{\bar{\beta}}-2\alpha}+e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\alpha}),\end{aligned}\tag{2.12}$$

将 (2.4) 写成

$$(s_1+s_2+s_3)e^{2\alpha}-(s_1e^{\bar{\bar{\beta}}-\alpha}+s_2e^{\bar{\beta}-\alpha}+s_3e^{\beta-\alpha})e^{3\alpha}=0,$$

故

$$s_1+s_2+s_3\equiv 0.\tag{2.13}$$

将 (2.6) 和 (2.12) 代入 (2.13), 并注意到 $a_n=b_n$, 得到

$$\begin{aligned}&u_{11}+u_{12}e^{(b_{n-1}-a_{n-1})z^{n-1}}+u_{13}e^{2(b_{n-1}-a_{n-1})z^{n-1}}\\&\quad+u_{14}e^{na_nz^{n-1}}+u_{15}e^{(na_n+(b_{n-1}-a_{n-1}))z^{n-1}}+u_{16}e^{(na_n+2(b_{n-1}-a_{n-1}))z^{n-1}}\\&\quad+u_{17}e^{2na_nz^{n-1}}+u_{18}e^{(2na_n+(b_{n-1}-a_{n-1}))z^{n-1}}+u_{19}e^{(2na_n+2(b_{n-1}-a_{n-1}))z^{n-1}}\equiv 0,\end{aligned}\tag{2.14}$$

其中

$$\begin{aligned}&u_{11}=p_2(z)e^{O(z^{n-2})},\ u_{12}=-p_2(z)(e^{O(z^{n-2})}+e^{O(z^{n-2})}),\ u_{13}=p_2(z)e^{O(z^{n-2})},\\&u_{14}=p_1(z)e^{O(z^{n-2})},\ u_{15}=-p_1(z)(e^{O(z^{n-2})}+e^{O(z^{n-2})}),\ u_{16}=p_1(z)e^{O(z^{n-2})},\\&u_{17}=p_0(z)e^{O(z^{n-2})},\ u_{18}=-p_0(z)(e^{O(z^{n-2})}+e^{O(z^{n-2})}),\ u_{19}=p_0(z)e^{O(z^{n-2})}.\end{aligned}\tag{2.15}$$

为了将引理 2.5 应用于 (2.14), 我们需要讨论常数 $b_{n-1}-a_{n-1}$, $na_n+(b_{n-1}-a_{n-1})$, $na_n+2(b_{n-1}-a_{n-1})$, $2na_n+(b_{n-1}-a_{n-1})$, $na_n-(b_{n-1}-a_{n-1})$, $2na_n-(b_{n-1}-a_{n-1})$ 和 $na_n-2(b_{n-1}-a_{n-1})$. 分成 8 种子情形.

子情形 6.1 上面所有的常数都不是零.

不难看出 (2.14) 满足引理 2.5 的条件. 因此 $u_{19}=p_0(z)\mathrm{e}^{O(z^{n-2})}\equiv 0$, 从而 $p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

子情形 6.2 $na_n+(b_{n-1}-a_{n-1})=0$.

子情形 6.3 $na_n+2(b_{n-1}-a_{n-1})=0$.

子情形 6.4 $2na_n+(b_{n-1}-a_{n-1})=0$.

对于这 3 种子情形, 分别将 (2.14) 写成

$$\begin{aligned}&(u_{11}+u_{15}+u_{19})+(u_{12}+u_{16})\mathrm{e}^{-na_nz^{n-1}}+u_{13}\mathrm{e}^{-2na_nz^{n-1}}\\&\quad+(u_{14}+u_{18})\mathrm{e}^{na_nz^{n-1}}+u_{17}\mathrm{e}^{2na_nz^{n-1}}\equiv 0,\\&(u_{11}+u_{16})+u_{12}\mathrm{e}^{-\frac{n}{2}a_nz^{n-1}}+u_{13}\mathrm{e}^{-na_nz^{n-1}}+(u_{14}+u_{19})\mathrm{e}^{na_nz^{n-1}}\\&\quad+u_{15}\mathrm{e}^{\frac{n}{2}a_nz^{n-1}}+u_{17}\mathrm{e}^{2na_nz^{n-1}}+u_{18}\mathrm{e}^{\frac{3}{2}na_nz^{n-1}}\equiv 0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&(u_{11}+u_{18})+(u_{12}+u_{19})\mathrm{e}^{-2na_nz^{n-1}}+u_{13}\mathrm{e}^{-4na_nz^{n-1}}+u_{14}\mathrm{e}^{na_nz^{n-1}}+u_{15}\mathrm{e}^{-na_nz^{n-1}}\\&\quad+u_{16}\mathrm{e}^{-3na_nz^{n-1}}+u_{17}\mathrm{e}^{2na_nz^{n-1}}\equiv 0.\end{aligned}$$

由引理 2.5 可得 $u_{13}=p_2(z)\mathrm{e}^{O(z^{n-2})}\equiv 0$, 矛盾.

子情形 6.5 $na_n-(b_{n-1}-a_{n-1})=0$.

子情形 6.6 $2na_n-(b_{n-1}-a_{n-1})=0$.

子情形 6.7 $na_n-2(b_{n-1}-a_{n-1})=0$.

对于这 3 种子情形, 分别将 (2.14) 写成

$$\begin{aligned}&u_{11}+(u_{12}+u_{14})\mathrm{e}^{na_nz^{n-1}}+(u_{13}+u_{15}+u_{17})\mathrm{e}^{2na_nz^{n-1}}+(u_{16}+u_{18})\mathrm{e}^{3na_nz^{n-1}}\\&\quad+u_{19}\mathrm{e}^{4na_nz^{n-1}}\equiv 0,\\&u_{11}+(u_{12}+u_{17})\mathrm{e}^{2na_nz^{n-1}}+(u_{13}+u_{18})\mathrm{e}^{4na_nz^{n-1}}+u_{14}\mathrm{e}^{na_nz^{n-1}}+u_{15}\mathrm{e}^{3na_nz^{n-1}}\\&\quad+u_{16}\mathrm{e}^{5na_nz^{n-1}}+u_{19}\mathrm{e}^{6na_nz^{n-1}}\equiv 0\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}&u_{11}+u_{12}\mathrm{e}^{\frac{n}{2}a_nz^{n-1}}+(u_{13}+u_{14})\mathrm{e}^{na_nz^{n-1}}+u_{15}\mathrm{e}^{\frac{3n}{2}a_nz^{n-1}}+(u_{16}+u_{17})\mathrm{e}^{2na_nz^{n-1}}\\&\quad+u_{18}\mathrm{e}^{\frac{5n}{2}a_nz^{n-1}}+u_{19}\mathrm{e}^{3na_nz^{n-1}}\equiv 0.\end{aligned}$$

由引理 2.5 可得 $u_{19}=p_0(z)\mathrm{e}^{O(z^{n-2})}\equiv 0$, 矛盾.

子情形 6.8 $b_{n-1}-a_{n-1}=0$.

此时, 将 (2.14) 写成

$$(u_{11}+u_{12}+u_{13})+(u_{14}+u_{15}+u_{16})\mathrm{e}^{na_nz^{n-1}}+(u_{17}+u_{18}+u_{19})\mathrm{e}^{2na_nz^{n-1}}\equiv 0.$$

由这个式子和引理 2.5 得到 $u_{11}+u_{12}+u_{13}\equiv 0$. 由 (2.13)–(2.15) 以及 $u_{11}+u_{12}+u_{13}\equiv 0$ 可知 $s_1\equiv 0$, 也就是

$$\mathrm{e}^{\bar{\alpha}-\alpha}-\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\beta-2\alpha}-\mathrm{e}^{\bar{\beta}-\alpha}+\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}-2\alpha}\equiv 0.$$

两边同时乘 $\mathrm{e}^{2\alpha}$, 得到

$$\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\alpha}-\mathrm{e}^{\bar{\alpha}+\beta}-\mathrm{e}^{\bar{\beta}+\alpha}+\mathrm{e}^{\beta+\bar{\beta}}\equiv 0,$$

即

$$(\mathrm{e}^{\alpha}-\mathrm{e}^{\beta})(\mathrm{e}^{\bar{\alpha}}-\mathrm{e}^{\bar{\beta}})\equiv 0,$$

因此, $\mathrm{e}^{\alpha}\equiv \mathrm{e}^{\beta}$, 矛盾.

情形 7 $\deg(\alpha-2\beta)<n$.

此时, $a_n=2b_n$. 使用与情形 2 类似的方法, 将 (2.7) 写成

$$(w_{91}+w_{95})\mathrm{e}^{4b_nz^n}+(w_{92}+w_{96})\mathrm{e}^{3b_nz^n}+w_{93}\mathrm{e}^{2b_nz^n}+w_{94}\mathrm{e}^{5b_nz^n}=0,$$

其中 $w_{9j}=w_{4j}\mathrm{e}^{O(z^{n-1})}$ $(j=1,2,\ldots,6)$. 由引理 2.5 可得

$$w_{93}\equiv 0,\quad w_{91}+w_{95}\equiv 0,\quad w_{92}+w_{96}\equiv 0. \tag{2.16}$$

由 $w_{93}\equiv 0$ 和 (2.8), 可得

$$p_2(z)\mathrm{e}^{\bar{\beta}-\beta}+p_1(z)\mathrm{e}^{\bar{\bar{\beta}}-\beta}+p_0(z)\mathrm{e}^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}\equiv 0. \tag{2.17}$$

如果 $\deg\alpha=\deg\beta=n>1$, 则 $\bar{\beta}-\beta$, $\bar{\bar{\beta}}-\beta$, $\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta$ 和 $\bar{\bar{\beta}}-\bar{\beta}$ 都是次数为 $n-1$ 的多项式. 由 (2.17) 和引理 2.5, 可知 $p_2(z)\equiv p_1(z)\equiv p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

接下来讨论 $\deg\alpha=\deg\beta=1$ 的情形. 此时

$$\alpha=2b_1z+a_0,\quad \beta=b_1z+b_0, \tag{2.18}$$

其中 $b_1\neq 0$ 是常数. 因此

$$w_{91}=w_{41}\mathrm{e}^{2a_0},\quad w_{92}=w_{42}\mathrm{e}^{a_0+b_0},\quad w_{95}=w_{45}\mathrm{e}^{a_0+2b_0},\quad w_{96}=w_{46}\mathrm{e}^{3b_0}. \tag{2.19}$$

由 (2.17) 可得

$$p_2(z)+p_1(z)\mathrm{e}^{b_1}+p_0(z)\mathrm{e}^{2b_1}\equiv 0. \tag{2.20}$$

将 (2.8), (2.18) 和 (2.19) 代入 $w_{91}+w_{95}\equiv 0$, 得到

$$\begin{aligned}&p_2(z)(\mathrm{e}^{a_0}+\mathrm{e}^{2b_1+2b_0}+\mathrm{e}^{b_1+2b_0})+p_1(z)(\mathrm{e}^{2b_1+a_0}+\mathrm{e}^{3b_1+2b_0}+\mathrm{e}^{b_1+2b_0})\\&\quad+p_0(z)(\mathrm{e}^{4b_1+a_0}+\mathrm{e}^{3b_1+2b_0}+\mathrm{e}^{2b_1+2b_0})\equiv 0.\end{aligned} \tag{2.21}$$

由 (2.20), 得到 $p_1(z)\mathrm{e}^{b_1}=-(p_2(z)+p_0(z)\mathrm{e}^{2b_1})$. 因此

$$p_1(z)(\mathrm{e}^{2b_1+a_0}+\mathrm{e}^{3b_1+2b_0}+\mathrm{e}^{b_1+2b_0})=-(p_2(z)+p_0(z)\mathrm{e}^{2b_1})(\mathrm{e}^{b_1+a_0}+\mathrm{e}^{2b_1+2b_0}+\mathrm{e}^{2b_0}). \tag{2.22}$$

将 (2.22) 代入 (2.21), 得到

$$(\mathrm{e}^{a_0}-\mathrm{e}^{2b_0})(\mathrm{e}^{b_1}-1)(p_0(z)\mathrm{e}^{3b_1}-p_2(z))\equiv 0. \tag{2.23}$$

如果 $\mathrm{e}^{b_1}=1$, 则由 (2.20) 可得 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

如果 $\mathrm{e}^{b_1}\neq 1$, 则由 (2.23) 可得

$$(\mathrm{e}^{a_0}-\mathrm{e}^{2b_0})(p_0(z)\mathrm{e}^{3b_1}-p_2(z))\equiv 0. \tag{2.24}$$

将 (2.8), (2.18) 和 (2.19) 代入 $w_{92}+w_{96}\equiv 0$ 并使用与上面类似的证明方法, 可以得到

$$(\mathrm{e}^{a_0}-\mathrm{e}^{2b_0})(p_0(z)\mathrm{e}^{b_1}-p_2(z))\equiv 0. \tag{2.25}$$

如果 $\mathrm{e}^{a_0}\neq \mathrm{e}^{2b_0}$, 则由 (2.24) 和 (2.25) 可以得到 $\mathrm{e}^{2b_1}=1$, 因此 $\mathrm{e}^{b_1}=1$ 或 $\mathrm{e}^{b_1}=-1$. 由 $\mathrm{e}^{b_1}=1$ 和 (2.20) 可以得到 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾. 由 $\mathrm{e}^{b_1}=-1$, (2.20) 和 (2.25) 可以得到 $p_1(z)\equiv p_2(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

如果 $e^{a_0}=e^{2b_0}$, 由 (2.18) 可以得到 $e^{\alpha}=e^{2\beta}$. 因此由 (2.1), (2.3) 和 (2.18) 得到

$$f(z)=\frac{1-e^{\beta}}{e^{\alpha}-e^{\beta}}=-e^{-\beta}=-e^{-b_1z-b_0},$$
$$g(z)=f(z)e^{\alpha}=-e^{\beta}=-e^{b_1z+b_0}.$$

令 $A=-e^{b_0}$, 可知情况 (ii) 成立.

情形 8 $\deg(2\alpha-3\beta)<n$.

由 (2.6), 可得 $a_n=\frac{3}{2}b_n$. 使用与情形 2 类似的证明, 将 (2.7) 写成

$$(w_{101}+w_{106})e^{3b_nz^n}+w_{102}e^{\frac{5}{2}b_nz^n}+w_{103}e^{2b_nz^n}+w_{104}e^{4b_nz^n}+w_{105}e^{\frac{7}{2}b_nz^n}=0,$$

其中 $w_{10j}=w_{4j}e^{O(z^{n-1})}$ $(j=1,2,\ldots,6)$. 由引理 2.5 得到

$$w_{103}\equiv 0,\quad w_{104}\equiv 0,\quad w_{101}+w_{106}\equiv 0. \tag{2.26}$$

由 $w_{103}\equiv 0$ 和 (2.8), 得到

$$p_2(z)e^{\bar{\beta}-\beta}+p_1(z)e^{\bar{\bar{\beta}}-\beta}+p_0(z)e^{\bar{\beta}+\bar{\bar{\beta}}-2\beta}\equiv 0. \tag{2.27}$$

与情形 7 类似, 如果 $\deg\alpha=\deg\beta=n>1$, 可以得到 $p_2(z)\equiv p_1(z)\equiv p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

接下来我们讨论 $\deg\alpha=\deg\beta=1$ 的情形. 此时

$$\alpha=\frac{3}{2}b_1z+a_0,\quad \beta=b_1z+b_0, \tag{2.28}$$

其中 $b_1\neq 0$ 是常数. 因此

$$w_{103}=w_{43}e^{2b_0},\quad w_{104}=w_{44}e^{2a_0+b_0},\quad w_{101}=w_{41}e^{2a_0},\quad w_{106}=w_{46}e^{3b_0}. \tag{2.29}$$

由 (2.27) 得到

$$p_2(z)+p_1(z)e^{b_1}+p_0(z)e^{2b_1}\equiv 0. \tag{2.30}$$

由 $w_{104}\equiv 0$ 知 $w_{44}\equiv 0$. 将 (2.28) 代入 $w_{44}\equiv 0$, 得到

$$p_1(z)e^{\frac{1}{2}b_1}\equiv -(p_0(z)e^{b_1}+p_2(z)). \tag{2.31}$$

将 (2.31) 代入 (2.30), 得到

$$(e^{\frac{1}{2}b_1}-1)(p_0(z)e^{\frac{3}{2}b_1}-p_2(z))\equiv 0. \tag{2.32}$$

如果 $e^{\frac{1}{2}b_1}=1$, 则由 (2.30) 得到 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

如果 $e^{\frac{1}{2}b_1}\neq 1$, 则由 (2.32) 得到

$$p_0(z)e^{\frac{3}{2}b_1}\equiv p_2(z). \tag{2.33}$$

将 (2.33) 代入 (2.30), 得到

$$p_1(z)e^{b_1}\equiv -p_2(z)(1+e^{\frac{1}{2}b_1}). \tag{2.34}$$

将 (2.8), (2.28) 和 (2.29) 代入 $w_{101}+w_{106}\equiv 0$, 得到

$$p_2(z)(e^{2a_0}-e^{\frac{3}{2}b_1+3b_0})+p_1(z)e^{\frac{3}{2}b_1}(e^{2a_0}-e^{3b_0})+p_0(z)e^{\frac{3}{2}b_1}(e^{\frac{3}{2}b_1+2a_0}-e^{3b_0})\equiv 0. \tag{2.35}$$

由 (2.33)–(2.35) 并注意到 $e^{\frac{1}{2}b_1}\neq 1$, 可以得到

$$(e^{2a_0}-e^{3b_0})(e^{b_1}-1)\equiv 0. \tag{2.36}$$

如果 $e^{b_1}=1$, 则由 (2.30) 可知 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

如果 $e^{2a_0}=e^{3b_0}$, 由 (2.28) 得 $e^{2\alpha}\equiv e^{3\beta}$, 故 $e^{\alpha}\equiv \pm e^{\frac{3}{2}\beta}$. 因此, 由 (2.2), (2.3) 和 (2.28) 得到

$$f(z)=\frac{(1-e^{\frac{1}{2}\beta})(1+e^{\frac{1}{2}\beta})}{e^{\beta}(\pm e^{\frac{1}{2}\beta}-1)}=-(e^{-\beta}\pm e^{-\frac{1}{2}\beta})=-(e^{-(b_1z+b_0)}\pm e^{-\frac{1}{2}(b_1z+b_0)}),$$
$$g(z)=e^{\beta(z)}(f(z)-1)+1=-(e^{b_1z+b_0}\pm e^{\frac{1}{2}(b_1z+b_0)}).$$

令 $A=-e^{\frac{1}{2}b_0}$, 可知情况 (iii) 成立. 证毕.

3 方程的两个解 CM 分担三个值

Nevanlinna [20] 研究了具有 3 个判别 CM 公共值的不同亚纯函数的最大个数, 得到如下结果.

定理 3.1 [20] 至多存在两个不同的非常数亚纯函数, 具有 3 个判别的 CM 公共值.

由定理 3.1, 一个自然的问题是: 二阶差分方程 (1.1) 是否存在两个具有 3 个判别的 CM 公共值的不同亚纯解? 答案是肯定的, 但由下面结果可知这只发生在特殊情景.

定理 3.2 令 $p_2(z),p_1(z),p_0(z)$ 为非零多项式且满足 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\not\equiv 0$. 假设 $f(z)$ 和 $g(z)$ 是方程 (1.1) 的两个不同的有限级超越亚纯解. 如果 $g(z)$ 和 $f(z)$ CM 分担 $0,1,\infty$, 则以下情况之一必成立:

(i) 方程 (1.1) 的形式为

$$y(z+2)-(e^{b_1}+e^{-b_1})y(z+1)+y(z)=0,$$

$f(z)=\frac{1}{A}e^{-b_1z}$ 且 $g(z)=Ae^{b_1z}$, 其中 b_1 是常数且满足 $e^{b_1}\neq -1$, A 是非零常数;

(ii) 方程 (1.1) 的形式为

$$p_2(z)y(z+2)+(p_0(z)+p_2(z))y(z+1)+p_0(z)y(z)=0,$$

$f(z)=\frac{1}{A}e^{-(2k+1)\pi i z}$ 且 $g(z)=Ae^{(2k+1)\pi i z}$, 其中 k 是整数, A 是非零常数, $p_0(z)$ 和 $p_2(z)$ 是非零多项式且满足 $p_2(z)+p_0(z)\not\equiv 0$;

(iii) 方程 (1.1) 的形式为

$$y(z+2)+y(z+1)+y(z)=0,$$

$f(z)=\pm\frac{1}{A}e^{-(\frac{2}{3}k\pi i+2m\pi i)z}-\frac{1}{A^2}e^{-(\frac{4}{3}k\pi i+4m\pi i)z}$ 且 $g(z)=\pm Ae^{(\frac{2}{3}k\pi i+2m\pi i)z}-A^2e^{(\frac{4}{3}k\pi i+4m\pi i)z}$, 其中 k,m 是整数且满足 $3\nmid k$, A 是非零常数.

注 3.3 方程 (1.1) 的两个 CM 分担 $0,1,\infty$ 的有限级超越亚纯解必为整函数.

定理 3.2 的证明 在定理 3.2 的条件下, (2.1)–(2.3) 仍然成立. 由定理 2.1 的证明可知 $\deg\alpha=\deg\beta=1$ 且 $e^{\alpha}\equiv e^{2\beta}$ 或 $e^{2\alpha}\equiv e^{3\beta}$. 令 $\beta=b_1z+b_0$ $(b_1\neq 0)$. 分两种情形讨论.

情形 1 $e^{\alpha}\equiv e^{2\beta}$. 此时

$$f(z)=\frac{1}{A}e^{-b_1z}, \tag{3.1}$$
$$g(z)=Ae^{b_1z}, \tag{3.2}$$

其中 $A=-e^{b_0}$ 是非零常数. 将 (3.1) 和 (3.2) 代入 (1.1), 得到

$$p_0(z)e^{2b_1}+p_1(z)e^{b_1}+p_2(z)=0, \tag{3.3}$$
$$p_2(z)e^{2b_1}+p_1(z)e^{b_1}+p_0(z)=0. \tag{3.4}$$

从 (3.3) 中减去 (3.4), 得到

$$(\mathrm{e}^{2b_1}-1)p_0(z)=(\mathrm{e}^{2b_1}-1)p_2(z). \tag{3.5}$$

显然 $\mathrm{e}^{b_1}\neq 1$, 否则, 由 (3.4) 得到 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

如果也有 $\mathrm{e}^{b_1}\neq -1$, 则由 $\mathrm{e}^{2b_1}\neq 1$ 和 (3.5) 可得 $p_2(z)\equiv p_0(z)$. 将 $p_2(z)\equiv p_0(z)$ 代入 (3.3), 得 $p_1(z)=-(\mathrm{e}^{b_1}+\mathrm{e}^{-b_1})p_2(z)$. 因此 (i) 成立.

如果 $\mathrm{e}^{b_1}=-1$, 则 $b_1=(2k+1)\pi\mathrm{i}$, 其中 k 是整数. 由 (3.3), 得到 $p_1(z)\equiv p_2(z)+p_0(z)$. 因此 (ii) 成立.

情形 2 $\mathrm{e}^{2\alpha}\equiv \mathrm{e}^{3\beta}$. 此时

$$f(z)=\pm\frac{1}{A}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}b_1z}-\frac{1}{A^2}\mathrm{e}^{-b_1z}, \tag{3.6}$$

$$g(z)=\pm A\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b_1z}-A^2\mathrm{e}^{b_1z}, \tag{3.7}$$

其中 $A=-\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b_0}$ 是非零常数. 将 (3.7) 代入方程 (1.1), 得到

$$-A(p_2(z)\mathrm{e}^{2b_1}+p_1(z)\mathrm{e}^{b_1}+p_0(z))\mathrm{e}^{b_1z}\pm(p_2(z)\mathrm{e}^{b_1}+p_1(z)\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b_1}+p_0(z))\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b_1z}\equiv 0. \tag{3.8}$$

令 $B=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}b_1}$, 由 (3.8) 和引理 2.5 可得

$$p_2(z)B^4+p_1(z)B^2+p_0(z)\equiv 0,\quad p_2(z)B^2+p_1(z)B+p_0(z)\equiv 0. \tag{3.9}$$

显然, $B\neq 0$, 同时也有 $B\neq\pm 1$. 否则, 如果 $B=1$ 或 $B=-1$, 由 (3.9) 得到 $p_2(z)+p_1(z)+p_0(z)\equiv 0$, 矛盾.

类似地, 将 (3.6) 代入 (1.1) 并应用引理 2.5 可得

$$\begin{aligned}&p_2(z)+p_1(z)B^2+p_0(z)B^4\equiv 0\\&p_2(z)+p_1(z)B+p_0(z)B^2\equiv 0.\end{aligned} \tag{3.10}$$

由 (3.9) 和 (3.10) 可得如下关于 $p_0(z),p_1(z),p_2(z)$ 的线性方程组.

$$\begin{cases}B^4p_0(z)+B^2p_1(z)+p_2(z)\equiv 0,\\B^2p_0(z)+Bp_1(z)+p_2(z)\equiv 0,\\p_0(z)+Bp_1(z)+B^2p_2(z)\equiv 0.\end{cases} \tag{3.11}$$

将方程组 (3.11) 的系数矩阵的行列式记为 $\det(A)$, 则

$$\begin{aligned}\det(A)&=\begin{vmatrix}B^4&B^2&1\\B^2&B&1\\1&B&B^2\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&B&B^2\\B^2&B&1\\B^4&B^2&1\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}1&B&B^2\\0&B-B^3&1-B^4\\0&B^2-B^5&1-B^6\end{vmatrix}\\&=-(1-B^2)(1-B^3)\begin{vmatrix}1&B&B^2\\0&B&1+B^2\\0&B^2&1+B^3\end{vmatrix}=-(1-B^2)(1-B^3)\begin{vmatrix}1&B&B^2\\0&B&1+B^2\\0&0&1-B\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

因此 $\det(A)=B(B^3-1)(B^2-1)(B-1)$.

注意到 $B\neq 0,\pm 1$, 如果 $B^3\neq 1$, 则 $\det(A)\neq 0$. 因此由 Cramer 法则知, 方程组 (3.11) 只存在一个解, 即 $p_0(z)\equiv p_1(z)\equiv p_2(z)\equiv 0$, 矛盾.

如果 $B^3=1$, 注意到 $B\neq 1$, 可知 $B=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}k\pi\mathrm{i}}$, 其中 k 是整数且 $3\nmid k$. 因此 $\frac{1}{2}b_1=\frac{2}{3}k\pi\mathrm{i}+2m\pi\mathrm{i}$, 其中 m 是整数. 将 $B^3=1$ 代入方程组 (3.11) 并注意到 $B\neq 0,\pm 1$, 可得

$$p_2(z)=p_1(z),\quad p_0(z)=-(B^{-1}+B)p_1(z).$$

又 $B=e^{\frac{2}{3}k\pi i}$, 其中 k 是整数且 $3\nmid k$, 故 $B^{-1}+B=e^{-\frac{2}{3}k\pi i}+e^{\frac{2}{3}k\pi i}=-1$. 从而 $p_0(z)=p_1(z)=p_2(z)$, 方程 (1.1) 变为

$$y(z+2)+y(z+1)+y(z)=0.$$

将 $\frac{1}{2}b_1=\frac{2}{3}k\pi i+2m\pi i$ 代入 (3.6) 和 (3.7), 可知 (iii) 成立. 证毕.

致谢 衷心感谢审稿专家对本文提出的修改建议.

参考文献

[1] Ablowitz M., Halburd R. G., Herbst B., On the extension of Painlevé property to difference equations, *Nonlinearity,* 2000, **13**(3): 889–905.

[2] Bergweiler W., Langley J. K., Zeros of differences of meromorphic functions, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 2007, **142**(1): 133–147.

[3] Brosch G., Eindeutigkeitssätze für meromorphe Funktionen, Thesis, Technical University of Aachen, 1989.

[4] Charak K. S., Korhonen R. J., Kumar G., A note on partial sharing of values of meromorphic functions with their shifts, *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **435**(2): 1241–1248.

[5] Chen Z. X., On the difference counterpart of Brück's conjecture, *Acta Math. Sci., Ser. B*, 2014, **34**(3): 653–659.

[6] Chen Z. X., Complex Differences and Difference Equations, Science Press, Beijing, 2014.

[7] Chiang Y. M., Feng S. J., On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane, *Ramanujan J.*, 2008, **16**(1): 105–129.

[8] Cui N., Chen Z. X., The conjecture on unity of meromorphic functions concerning their differences, *J. Difference Equ. Appl.*, 2016, **22**(10): 1452–1471.

[9] Gross F., Factorization of Meromorphic Functions, U. S. Government Printing Office, Washington, 1972.

[10] Gundersen G., Meromorphic functions that share four values, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1983, **277**(2): 545–567.

[11] Halburd R. G., Korhonen R. J., Growth of meromorphic solutions of delay differential equations, *Proc. Amer. Math. Soc.*, 2017, **145**(6): 2513–2526.

[12] Halburd R. G., Korhonen R., Finite-order meromorphic solutions and the discrete Painlevé equations, *Proc. London Math. Soc.*, 2007, **94**(2): 443–474.

[13] Hayman W. K., Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[14] Heittokangas J., Korhonen R., Laine I., Rieppo J., Zhang J. L., Value sharing results for shifts of meromorphic functions, and sufficient condition for periodicity, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **355**(1): 352–363.

[15] Hu P. C., Wang Q. Y., On unicity of meromorphic solutions of differential-difference equations, *J. Korean Math. Soc.,* 2018, **55**(4): 785–795.

[16] Ishizaki K., Yanagihara N., Wiman–Valiron method for difference equations, *Nagoya Math. J.*, 2004, **175**: 75–102.

[17] Laine I., Yang C. C., Clunie theorems for difference and q-difference polynomials, *J. Lond. Math. Soc.*, 2007, **76**(3): 556–566.

[18] Zhang J., Liao L. W., Entire functions sharing some values with their difference operators, *Sci. China Math.*, 2014, **57**(10): 2143–2152.

[19] Mues E., Meromorphic functions sharing four values, *Complex Variables,* 1989, **12**(1–4): 167–179.

[20] Nevanlinna R., Le Thérème de Picard–Borel et la théorie des fonctions méromorphes, Paris, 1929.

[21] Wang S. P., On meromorphic functions that share four values, *J. Math. Anal. Appl.,* 1993, **173**(2): 359–369.

[22] Yang C. C., Yi H. X., Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, 2003.

[23] Yang L., Value Distribution Theory and New Research (in Chinese), Science Press, Beijing, 1982.

[24] Zheng J. H., Korhonen R., Studies of differences from the point of view of Nevanlinna theory, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2020, **373**(6): 4285–4318.