

案例 3—函数的概念及其表示单元教学设计

林康慧 2020 级研究生第二小组李玉萍等同学 朱清波 赵萍

一、文献综述

(一) 研究现状

研究现状主要包括三方面：函数教学、函数教学的困难、函数教学策略。

在函数教学方面，已有研究包括函数概念的认知过程^[1]、函数概念的定义^[2]、函数的有效教学^[3]等。

在函数教学困难方面，已有的研究包括学生学习函数概念的困难^[4]、影响函数概念教学的原因^[5]等。

在函数教学策略方面，已有的研究包括如何做好初升高函数概念的衔接^[6]等。

以上研究对函数概念及其表示单元教学具有一定的指导意义，使教师更加深入地了解学情，同时有针对性地根据学情选择合适的教学策略。

(二) 研究方法

函数的概念及其表示的常用研究方法如下：

1. 文献分析法：通过详实可靠的资料考证分析，了解国内外的函数教学内容、教学模式、教学顺序等，从国内一些研究“函数教学”的论文中了解当前的研究现状；
2. 问卷调查法：对函数教学过程中教师和学生两方面的情况进行研究，根据不同的对象分别编制学生问卷和教师问卷，采用纸质问卷为载体，面向目标师生部分抽样进行发放并回收；
3. 观察法：主要采用的是融入课堂教学情境的参与式观察，对函数相关的数学课堂教学进行持续跟踪观察，记录了学生和教师的部分课堂行为；
4. 访谈法：在回收处理调查问卷和课堂参与式观察之后，就某些问题的细节，对个别学生和教师通过访谈法进行深度挖掘。通过访谈法搜集到的资料，对问卷调查的结果起到补充和验证的作用。

(三) 结论

函数概念及其表示学习困难的原因主要有：

知识层面：函数概念具有高度抽象性和符号化；函数表征形式具有多样化。

学生层面：思维仍处于经验性的逻辑思维，对于高度抽象化和符号化的函数概念较难接受。

教师层面：教学过程中过分强调定义的叙述，忽视函数概念的背景与引入。

针对以上问题，教师可采取的措施有：

1. 重视结合具体情境和实例进行教学，在函数教学过程中注重数形结合思想的渗透，引导学生推理、归纳并概括对数函数的概念及其图象性质；
2. 注重结合学生初中所学的函数概念经验进行教学，并避免负迁移；
3. 借助信息技术工具研究函数，凸显函数图象的直观性。

总的来说，函数概念及其表示单元教学需结合实例、结合已有经验、结合信息技术引导学生的概念生成，培养学生的数形结合等数学思想以及数学抽象等核心素养。

二、教材对比分析

(一) 2004 年人教 A 版与 2019 年人教 A 版对比

	2004 人教 A 版教材	2019 人教 A 版教材
章节编排	1.1.1 函数的概念	3.1.1 函数的概念
	1.1.2 函数的表达法	3.1.2 函数的表达法
内容编排	函数的概念	
	从三个实例的共同特征归纳得到函数的概念	从四个实例入手，更加深入地探讨函数的三要素，再从共同特征中抽象概括函数的概念
	函数的表达法	
	通过 5 道例题学习三种表示法的特点、分段函数、处理函数图象的方式以及映射的概念	删减了映射的概念，将课本中的 5 道例题划分在两个课时中，通过前三道例题学习三种表示法的区别和特点、分段函数；通过后两道例题体会如何用函数解决实际问题

(二) 2019 年北师大版与 2019 年人教 A 版教材对比

	2019 北师大版教材	2019 人教 A 版教材
章节编排	1 生活中的变量关系	3.1.1 函数的概念
	2.1 函数概念	
	2.2 函数的表示法	3.1.2 函数的表达法
内容编排	函数的概念	
	第一节以 6 个生活实例说明变量之间的关系，并给出分段函数的概念；第二节直接利用集合的语言给出函数的概念	从四个实例入手，更加深入地探讨函数的三要素，再从共同特征中抽象概括函数的概念
	函数的表示法	
	借用上一节中的三个实例简单介绍三种表示法，借助熟悉的一次函数等分析三种表示法的优劣	删减了映射的概念，将课本中的 5 道例题划分在两个课时中，通过前三道例题学习三种表示法的区别和特点、分段函数；通过后两道例题体会如何用函数解决实际问题

三、内容和内容解析

(一) 内容

本单元的内容包括函数的概念、函数的表示.

本单元的教学共 4 课时. 其中, 3.1.1 函数的概念 2 课时; 3.1.2 函数的表示 2 课时.

(二) 内容解析

本单元的重点是建立“对应关系说”观点下用集合语言表述的函数概念.

从知识的上下位关系来看, 本单元是在初中函数“变量说”的基础上, 从具体情境出发, 利用集合语言抽象概括出函数的一般概念, 从“变量说”过渡到“对应关系说”.

在学习过程中, 培养数学抽象、直观想象等核心素养.

四、目标和目标解析

(一) 目标

1. 在初中用变量之间的依赖关系描述函数的基础上, 用集合语言和对应关系刻画函数, 建立完整的函数概念, 体会集合语言和对应关系在刻画函数概念中的作用, 并明确了解构成函数的要素;

2. 能求简单函数的定义域和值域, 掌握判别两个函数是否相等的方法;

3. 在实际情境中, 会根据不同的需要选择恰当的方法(如图象法、列表法、解析法)表示函数, 理解函数图象的作用; 并通过具体实例, 了解简单的分段函数并进行简单应用.

(二) 目标解析

达成上述目标的标志是:

1. 认识到客观世界的变化可以用函数模型来描述, 并意识到初中函数概念的特殊性和局限性, 能够通过实例理解用集合与对应的语言来刻画函数的概念, 体会函数的本质, 明确函数的三要素: 定义域、值域、对应法则;

2. 会求一些简单函数的定义域、值域, 其结果能用“区间”的符号表示. 知道判断两个函数是否相等看定义域和对应法则;

3. 知道表示函数最基本的有三种方法: 图象法、列表法、解析法. 并且会根据不同的实际情境选择合适的方法表示函数. 认识到生活中有很多分段函数的例子: 如出租车计费, 个人所得税纳税额等.

五、教学问题诊断分析

从知识储备看, 学生在初中已学习了函数的概念, 但并没有过多地谈及自变量的变化范围. 从思维发展看, 高一学生思维能力正在由形象经验型向抽象理论型转变, 能够用假设、推理来思考和解决问题. 但分析、归纳、抽象的思维能力还是比较薄弱, 而函数概念的内涵、用集合语言和对应关系表述概念都较抽象.

因此, 本单元的教学难点包括从不同的问题情境中提炼出函数要素, 并由此抽象出函数概念; 理解函数的对应关系. 突破难点的关键在于从学生已有的经验出发, 充分利用课本的

实例以及思考题，注重信息技术的使用，使图象的直观性、表格的简洁性和代数的精准性相结合，充分利用数形结合.

六、教学条件支撑

借助几何画板描绘函数图象，通过几何画板的操作，引导学生将函数单调性、奇偶性的文字语言描述转化为符号语言描述，培养学生表达与交流的能力.

七、《函数的概念及其表示》（第二课时）教学设计

（一）教学内容

函数的概念及其表示.

（二）教学目标

知识目标：通过具体实例，了解函数的概念及基本性质.

能力目标：能够求具体的简单函数的定义域及函数值，用区间表示函数的定义域.

素养目标：通过具体实例，明确函数的本质是数集到数集的一种对应关系，不需“运动变化”或解析式计算等刻板认知，培养严谨的思维习惯.

情感目标：理解新定义的发展史，增强学习数学的兴趣，培养严谨求实的科学精神.

（三）教材分析

1. 教材来源

2019年人教A版新教材《普通高中教科书》数学必修第一册第三章3.1函数的概念及其表示.

2. 地位与作用

本节课是在第一节课重新认识函数概念的基础上，继续对构成函数的三个要素进行辨析，先明确定义域的含义，自然过渡到连续实数集的区间表示法，然后通过三要素确定函数的唯一性，即引导学生探究并掌握同一函数需具备的特征，提高分析问题、解决问题的能力.

（四）学情分析

学生已在初中和前一节课学习函数的有关知识，明确了函数的本质是数集到数集的一种对应关系，不需“运动变化”或解析式计算等刻板认知，学生自然会产生“函数最核心的要素是什么？”的类似疑问，为本节课继续探究函数的三要素打下一个良好的基础.

（五）教学重难点分析

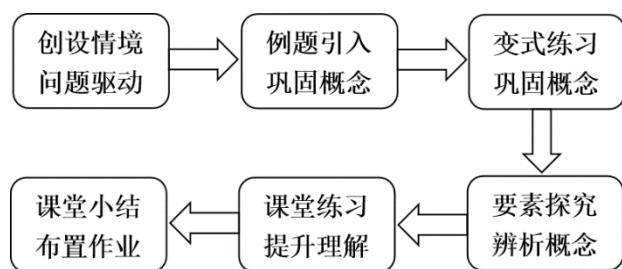
教学重点：能够求具体的简单函数的定义域及函数值，掌握判断两个函数相同的方法.

教学难点：对应法则在不同呈现方式下的理解，函数三要素之间的联系.

（六）教学思路与方法

本节课采用经历由具体到一般的概念形成过程，再由一般到具体的概念应用过程的教学思路，采用归纳与演绎相结合的教学方法进行教学.

（七）教学流程



(八) 教学过程设计

教学环节：创设情境，问题驱动

教学内容	师生活动	设计点评
<p>【问题引入】</p> <p>请回忆上节课学过的函数的概念，简要谈谈你对函数的理解，并说明什么是函数的三要素。</p>	<p>通过课堂提问，了解学生对函数定义的实际认知，教师通过对其回答的关键字眼加以提炼并反复修正，让学生达到真正理解的层次。</p>	<p>复习上节课通过实例重新构建的函数概念及函数的三要素，加深学生对于概念的理解与记忆，同时有助于学生在已经掌握的知识上建构新知识。</p>

教学环节：例题引入，巩固概念

教学内容	师生活动	设计点评									
<p>例题 1: 已知函数 $f(x) = \sqrt{x+3} + \frac{1}{x+2}$.</p> <p>(1) 求函数的定义域；</p> <p>(2) 求 $f(-3), f(\frac{2}{3})$ 的值；</p> <p>(3) 当 $a > 0$ 时，求 $f(a), f(a-1)$ 的值.</p> <p>【附】 为方便数集表示的简洁性，我们引入区间的概念，并按实际情况分为闭区间，开区间以及半开半闭区间等.</p> <table border="1" style="width: 100%; border-collapse: collapse;"> <thead> <tr> <th>定义</th> <th>名称</th> <th>符号</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>$\{x a \leq x \leq b\}$</td> <td>闭区间</td> <td>$[a, b]$</td> </tr> <tr> <td>$\{x a < x < b\}$</td> <td>开区间</td> <td>(a, b)</td> </tr> </tbody> </table>	定义	名称	符号	$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$	$\{x a < x < b\}$	开区间	(a, b)	<p>教师可以投影学生的作答过程，或者请学生上黑板板书其过程，鼓励学生展现自己的风采；</p> <p>在区间的定义中，教师只需写出部分，让学生完成剩余部分的表示，教师再加以评析即可。</p>	<p>结合例题让学生总结求解函数的定义域及函数值的要点和方法，同时引导学生深刻感受函数定义域即使解析式有意义的自变量的取值范围，强化函数定义域的概念，使学生体会转化与化归思想，旨在体现数集表</p>
定义	名称	符号									
$\{x a \leq x \leq b\}$	闭区间	$[a, b]$									
$\{x a < x < b\}$	开区间	(a, b)									

$\{x a \leq x < b\}$	半开半闭区间	$[a, b)$		示的多样性和简洁性.
$\{x a < x \leq b\}$	半开半闭区间	$(a, b]$		
$\{x x \leq b\}$		$(-\infty, b]$		
$\{x x > a\}$		$(a, +\infty)$		

你能用刚学到的知识表示例题 1 的定义域吗?

教学环节：变式练习，巩固概念

教学内容		师生活动	设计点评												
例题 2：阅读下列表格信息完成填空. <table border="1" style="margin-left: 20px;"> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>4</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td>3</td> <td>1</td> <td>5</td> <td>2</td> <td>4</td> </tr> </table> <p>(1) $f[f(3)] = \underline{\hspace{2cm}}$.</p> <p>(2) 若 $f[f(m)] = 1$, 则实数 m 的值为 $\underline{\hspace{2cm}}$.</p>		x	1	2	3	4	5	$f(x)$	3	1	5	2	4		通过表格来呈现数集与数集的对应方式, 让学生深刻理解函数对应法则的多样性.
x	1	2	3	4	5										
$f(x)$	3	1	5	2	4										

教学环节：要素探究，辨析概念

教学内容		师生活动	设计点评
例题 3: 下列函数中哪个函数与函数 $y = x$ 是同一个函数? (1) $y = (\sqrt{x})^2$; (2) $y = \sqrt{x^2}$; (3) $u = \sqrt[3]{v^3}$; (4) $m = \frac{n^2}{n}$. 思考 1: 两个函数的定义域和值域相同, 是否为同一函数, 你能举出例子吗? (不是同一函数, 如 $f(x) = x^2$, $g(x) = (x+1)^2$) 思考 2: 两个函数的对应法则和值域相同, 是否为同一函数, 你能举出例子吗? (不是同一函数, 如 $f(x) = x^2, x \in [-1, 1]$ $g(x) = x^2, x \in [0, 1]$)		该环节教师可以让学生大胆发表自己的看法, 同时也让学习小组讨论对上述问题的理解, 最终达到对问题理解的一致性	引导学生从定义域和对应关系上思考并判断函数是否相同, 让学生辨析函数的三要素之间的关系, 再次加深学生对于函数概念的理解, 培养学生的数学抽象的核心素养.

教学环节：课堂练习，提升理解

教学内容		师生活动	设计点评
------	--	------	------

<p>1. 求下列函数的定义域（用区间表示）.</p> <p>(1) $f(x) = \frac{1}{x-2}$; (2) $f(x) = \sqrt{3x+2}$;</p> <p>(3) $f(x) = \sqrt{x+1} + \frac{1}{2-x}$.</p> <p>2. 已知 $f(x) = 2x+3$, 求 $f(1), f(a), f[f(a)]$.</p> <p>3. 判断函数 $f(x) = \frac{x^2-4}{x-2}$ 与函数 $g(x) = x+2$ 是否是同一个函数.</p>	<p>教师让学生独立完成该部分内容, 及时把正确的结论反馈给大家, 从而加深对所学概念的理解.</p>	<p>通过 3 道练习题, 检阅学生对本节课学习内容的理解, 并提高学生利用所学知识解决问题的能力.</p>
---	---	--

教学环节: 课堂小结, 布置作业

教学内容	师生活动	设计点评
<p>这两节课我们学习了哪些内容? 请同学们回忆并思考以下问题:</p> <p>(1) 函数的定义域指的是什么?</p> <p>(2) 区间的概念是什么? 与集合的关系是什么?</p> <p>(3) 如何判断两个函数是否相同?</p> <p>(4) 本节课你还学到了什么?</p> <p>作业: 阅读并完成以下问题:</p> <p>1. 求函数的定义域(用区间表示):</p> <p>(1) $f(x) = \frac{1}{4x+7}$;</p> <p>(2) $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{x+3} - 1$.</p> <p>2. 已知函数 $f(x) = 3x^3 + 2x$, 求 $f(2), f(-a), f(-a) + f(a)$.</p> <p>3. 判断下列各组函数中的函数是否是同一个函数, 并说明理由:</p> <p>(1) 表示炮弹飞行高度 h 与时间 t 的函数 $h = 130t - 5t^2$ 和二次函数 $y = 130x - 5x^2$.</p> <p>(2) $f(x) = 1$ 和 $g(x) = x^0$.</p>	<p>教师鼓励学生积极发言, 通过多数同学的表述来捕捉关键词, 最终形成统一的认知</p>	<p>引导学生回顾本节课学习的内容和学习方法, 并让学生思考通过本节课的学习领悟到了哪些数学思想.</p> <p>检测学生对于区间概念的理解, 考察学生对于具体函数的定义域和函数值的求解方法的掌握, 检测学生对于判断函数相同的方法的掌握程度.</p>

(九) 教学成效分析

1. 调查过程

调查目的: 了解本节课《函数的概念》的教学成效, 主要从教学目标的达成情况, 学生对知识的掌握情况, 教学策略和方法等方面进行测量.

调查方法: 问卷调查法、课堂观察法.

调查工具：《函数的概念》教学调查问卷、课堂观察记录表。

调查对象：广州市执信中学高一（10）班 42 名学生。

工具说明：课堂观察记录表分为教学目标、教材研究、教学过程和课堂文化四大维度，每一维度下设置不同观测指标（详见附录二），通过课堂上对教师和学生行为等进行观测，分析教学成效；学生调查问卷设计主要包括两部分：水平测试和自评量表。其中水平测试题旨在帮助学生反思自身学习成果；自评量表则是根据教学目标维度划分为知识、能力、素养和情感目标四个维度，具体的题目分配和计分方式如下表：

表 1 《函数的概念及其表示》教学调查问卷细目表

考察维度	题目数量	题目分布	计分方式
知识目标	4	第 1-4 题	第 6 题是反向题不计分，12 题不计分，其他题满分均为 5 分，由“非常不同意→非常同意”分数按等梯度设置为 1 至 5 分
能力目标	3	第 5-7 题	
素养目标	2	第 8、9 题	
情感目标	2	第 10、11 题	
教学策略与方法	1	第 12 题	
总计	12	/	

2. 调查结果与分析

（1）问卷调查结果

①信效度分析

利用 Alpha 信度分析所得的问卷量表信度系数值为 0.847，大于 0.7，说明研究数据信度质量良好，可用于进一步分析。针对问卷的效度，利用 KMO 和巴特利特检验得到 KMO 值为 0.805，大于 0.7，说明问卷的结构效度良好。

②描述分析

对问卷各项的平均分进行统计，结果如表 2，可以看出问卷各项平均分较高，有 7 项平均分在 4 分以上，学生整体掌握情况较好。

表 2 量表各项得分情况

维度	题号	题目	平均分
知识目标	1	我知道函数的三要素.	3.81
	2	我知道左开右闭区间的含义.	4.43
	3	我知道区间表示和集合表示的联系与区别.	4.17
	4	我知道如何判断两个函数相等.	4.24
能力目标	5	我能够在数轴上表示区间 $[-2, 3)$.	4.62
	6	我在判断两个函数相等关系是总是出错.	2.74
	7	我能够求出给定函数的定义域和值域.	4.00
素养目标	8	通过此堂课的学习，我发现用数轴来表示区间直观易懂.	4.02
	9	我能利用以前学过的运算规则求解相关运算问题.	3.88

情感	10	通过此课堂的学习, 我觉得区间表示法非常好用.	4.10
目标	11	我觉得这节课的内容很简单.	2.86

③频次分析

采用多重频次分析, 对“12 题你喜欢老师运用何种教学方式 (多选题)”答题情况进行统计, 可以看出针对本节课的教学, 学生对各种教学方式都有所偏好. 在所列举的教学方式中, “讲授教学”、“练习教学”、“教师演示实验”和“动画教学”都得到了学生较高的评价. “实物模型教学”和“讨论教学”也颇受学生喜爱, 分别达到了 42.86%和 30.95%, 再一次体现了生动有趣的教學模式和讲练结合教學模式在中學生群体中深受喜爱.

表 3 学生喜爱的教学方式占比分析

教学方式	比例	教学方式	比例
讲授教学	78.57%	动画教学	54.76%
讨论教学	30.95%	录像教学	19.05%
练习教学	64.29%	实物模型教学	42.86%
读书指导	14.29%	学生实验探究	26.19%
参观学习	19.05%	教师演示实验	54.76%

④调查结果

从调查问卷的统计分析, 学生对本次教学的评价较高. 知识目标维度中所有题目的平均分均在 3.8 分之上, 说明学生对本节课知识的掌握良好, 能够通过具体实例对函数的概念及函数三要素有清晰的了解. 能力目标维度中的第 5 题和第 7 题的平均分均在 4 以上, 说明通过本堂课的教学, 大部分学生都能够求具体的简单函数的定义域及函数值, 并会用区间表示函数的定义域; 第 6 题为反向题, 得分较低也从侧面说明本节课能力目标达成情况良好. 素养目标维度的平均分在 4 左右浮动, 说明在本堂课的教学向学生渗透了数学运算素养和数形结合思想. 情感目标维度中第 10 题平均分较高, 说明学生体会到了区间表示法的简洁直观; 但第 11 题“我觉得这节课的内容很简单”得分仅有 2.86, 说明函数的概念这一部分内容的高度抽象性使学生在学学习时往往会出现畏难情绪, 这也需要教师在教学中进一步思考应该如何处理, 帮助学生克服这一情绪障碍.

(2) 课堂观察记录分析

对课堂观察记录的文本进行分析, 得出以下结论:

本节课在教材基本例题的基础上进行细微改编, 增设表格型函数对应关系的考查问题帮助学生对应法则不同呈现方式的理解, 同时重难点设计准确、处理恰当. 在教学目标上, 本节课教学目标设置合理, 符合学生认知; 要求学生能掌握区间的概念, 并能够用区间表示函数的定义域; 能够求具体的简单函数的定义域及函数值以及学会判断两个函数相同的方法, 同时对学生辨析函数本质的能力也提出要求.

教学过程时间分配合理、教学逻辑和设计意图清晰, 能够在函数的三要素之间反复展开探究. 采取问题驱动的教学方法让学生在解决问题的过程中反复校正和加深自己对函数的

理解，符合学生实际的心理认知，有利于教学目标的达成；在课堂实施中，教师借助 PPT 使教学内容紧凑，同时组织有效的小组讨论、代表发言等活动。

从整个课堂文化来看，教师能够较好地把控课堂调动学生积极性，借助习题渗透分类讨论思想，培养学生的数学思维和严谨性，并在教学中拓展学生对函数的认知，使学生感受数学文化。

3. 结论

本节课的教学受到学生与听课教师的好评。学生对知识的掌握情况较好，同时教师注重对学生能力和思维的培养，可见教学成效良好；在教学过程中适当创新，效果会更佳。

（十）教学反思

1. 优点

课堂思路清晰，内容的转换流畅，学生能进一步明确函数的本质以及辨析函数的三要素，完成了预设目标；在区间知识点的讲授时，能及时回应学生临时生成的各种疑问，不追求课堂进度，充分体现了以学生为中心的课堂风格；例题 2 的中函数的表格形式很新颖，对学生的逆向思维提出了一些挑战，本题的设置对函数的定义域和值域的概念进行了合理的形式补充；在研究函数的是否相同时能充分调动学生的积极性，学生能自主构造反例来说明个人观点，另外在老师的引导下，大部分学生能得出只需要看定义域和对应法则就能确定函数是否唯一的规律。

2. 不足

课堂开始引入时，教师提出的问题较为宽泛，指向性不明确导致效率不高；在探究函数是否唯一时，学生的知识储备差异性较大，需要考虑另一部分学生思考的真实水平，因此在后续检测中要重点查看这部分学生的实际掌握水平。

八、参考文献

- [1]贾丕珠.函数学习中的六个认知层次[J].数学教育学报, 2004(03):79-81.
- [2]于海薇.高中函数教学研究[D].辽宁师范大学, 2015.
- [3]王琪.高中函数有效教学研究[D].辽宁师范大学, 2015.5.
- [4]章建跃.数学学习论与学习指导[M].北京:人民教育出版社, 2001.
- [5]濮安山.初中生函数概念发展研究[D].东北师范大学, 2010.12.
- [6]陈蓓.函数概念的教与学:[D].江苏:扬州大学, 2006.