文章编号: 0583-1431(2015)05-0765-08 **文献标识码: A**

零级亚纯函数与多项式的复合函数的对数导数引理及其应用

黄志波

华南师范大学数学科学学院 广州 510631
E-mail: huangzhibo@scnu.edu.cn

摘　要　研究零级亚纯函数与多项式的复合函数的对数导数引理. 作为其应用, 我们获得了零级亚纯函数与多项式复合函数的 Nevanlinna 特征和第二基本定理.

关键词　Nevanlinna 理论; 零级亚纯函数; 多项式; 复合函数; q- 差分模拟
MR(2010) 主题分类　30D35, 39A13
中图分类　O174.5

The Logarithmic Derivative Lemma on Zero Order Meromorphic Functions Composed with Polynomials and Its Applications

Zhi Bo HUANG

School of Mathematical Sciences, South China Normal University, Guangzhou 510631, *P. R. China*
E-mail: *huangzhibo@scnu.edu.cn*

Abstract　We investigate the lemma on the logarithmic derivative of zero order meromorphic functions composed with polynomials. As its applications, we also study the Nevanlinna characteristic and the second main theorem for zero order meromorphic functions composed with polynomials.

Keywords　Nevanlinna theory; meromorphic functions of zero order; polynomials; composite functions; q-difference analogues
MR(2010) Subject Classification　30D35, 39A13
Chinese Library Classification　O174.5

1　引言

本文所说的亚纯函数是指在整个复平面 $\mathbb{C}$ 上亚纯. 同时使用亚纯函数 Nevanlinna 值分布理论的基本结果和标准记号 [8, 11], 比如均值函数 $m(r,f)$, 计数函数 $N(r,f)$ 和特征函数 $T(r,f)$.

收稿日期: 2012-11-15; 接受日期: 2015-02-04
基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (11171119); 广东省自然科学基金资助项目 (2014A030313422)

给定一集合 $E\subset[0,\infty)$, 我们定义集合 E 的对数密度为 $\lim_{r\to\infty}\frac{\int_{[1,r]\cap E}dt/t}{\log r}$.

1925 年, Nevanlinna [12] 获得的 Poisson–Jensen 公式, 是值分布理论发展的标志性开始. 随后, 亚纯函数的 Nevanlinna 值分布理论被运用去研究线性和非线性微分方程亚纯解的存在性、增长级、值分布 [11] 和唯一性 [13] 等方面, 而对数导数引理是该理论中一个本质的结果. 近年来, Halburt 和 Korhonen (见文 [5, 定理 2.1] 及 [6, 推论 2.2]), 蒋翼迈和冯绍继 (见文 [3, 推论 2.5]) 分别获得有限级对数导数引理的差分模拟, Halburt, Korhonen 和 Tohge (见文 [7, 定理 5.1]) 给出超级小于 1 的亚纯函数的对数导数引理, Korhonen (见文 [10, 引理 2.2]) 证明了超级小于 1 的亚纯函数与多项式的复合函数的对数导数引理. 从而使得差分和差分方程的研究获得迅速发展.

本文研究零级亚纯函数与多项式的复合函数的对数导数引理及其在估计 Nevanlinna 特征函数和第二基本定理中的应用.

2 零级亚纯函数与多项式的复合函数的对数导数引理

对数导数引理已经广泛地运用到复域微分方程亚纯解的值分布研究 [4, 9, 11]. 下面的定理 2.1 是零级亚纯函数与多项式的复合函数的对数导数引理, 它是对数导数引理的 q- 差分模拟 (见文 [1, 定理 1.2]) 的推广.

定理 2.1 假设 $f(z)$ 是非常数零级亚纯函数且满足 $f(0)\neq 0,\infty$, $n\in\mathbb{N}$. 如果 $\omega(z)=az^n+p_{n-1}z^{n-1}+\cdots+p_0$ 和 $\nu(z)=z^n$ 是两个非常数多项式, 其中 $|a|\neq 1$, 那么

$$m\left(r,\frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right)=o\left(T(r^n,f)\right)$$

在对数密度为 1 的集合上成立.

为证明定理 2.1, 需要下面的引理.

引理 2.2 (见文 [10, 引理 2.3]) 假设 $P(z)=cz^{\deg(P)}+\cdots$ 是一个非常数多项式, $0<\gamma<1$. 那么, 对所有的 $r>0$,

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\zeta}{|P(re^{\mathrm{i}\zeta})|^{\gamma/\deg(P)}}\leq\frac{2\pi}{(1-\gamma)|c|^{\gamma/\deg(P)}}\cdot\frac{1}{r^{\gamma}}.$$

引理 2.3 假设 $f(z)$ 是非常数亚纯函数且满足 $f(0)\neq 0,\ \infty$, $n\in\mathbb{N}$, $\alpha>1$ 和 $0<\delta<1$. 如果 $\omega(z)=az^n+p_{n-1}z^{n-1}+\cdots+p_0$ 和 $\nu(z)=z^n$ 是两个非常数多项式, 其中 $|a|\neq 1$. 那么, 存在 $r_0>0$, 使得对所有的 $r=|z|\geq r_0$,

$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right)\leq{}&\frac{16\alpha C^{\delta/n}}{1-\delta}\cdot\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1-\delta/n}\left(T(\rho,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right)\\&+\frac{2n\alpha(C+1)^{\delta/n}}{\delta(1-\delta)}\cdot\frac{1+|a|^{\delta/n}}{|a|^{\delta/n}}\left(n(\rho,f)+n\left(\rho,\frac{1}{f}\right)\right),\end{aligned}$$

其中 $C=\max\{|a|,1\}$ 和 $\rho:=\frac{\alpha(\alpha+1)}{2}Cr^n$.

证明 根据 Poisson–Jensen 公式 (见文 [8, 定理 1.1]), 得到

$$\begin{aligned}\log\left|\frac{f\circ\omega(z)}{f\circ\nu(z)}\right|={}&\int_0^{2\pi}\log\left|f\left(se^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{Re}\left(\frac{se^{\mathrm{i}\theta}+\omega(z)}{se^{\mathrm{i}\theta}-\omega(z)}-\frac{se^{\mathrm{i}\theta}+\nu(z)}{se^{\mathrm{i}\theta}-\nu(z)}\right)\frac{d\theta}{2\pi}\\&+\sum_{|a_i|<s}\log\left|\frac{s(\omega(z)-a_i)}{s^2-\overline{a}_i\omega(z)}\cdot\frac{s^2-\overline{a}_i\nu(z)}{s(\nu(z)-a_i)}\right|-\sum_{|b_j|<s}\log\left|\frac{s(\omega(z)-b_j)}{s^2-\overline{b}_j\omega(z)}\cdot\frac{s^2-\overline{b}_j\nu(z)}{s(\nu(z)-b_j)}\right|,\end{aligned}\tag{2.1}$$

其中 $|z|=r$, $s=\frac{\alpha+1}{2}(Cr^n+|p_{n-1}|r^{n-1}+\cdots+|p_0|)$, $\{a_i\}$ 和 $\{b_j\}$ 分别是函数 $f(z)$ 的零点和极点. 令 $\{c_k\}:=\{a_i\}\cup\{b_j\}$. 在集合

$$\left\{\zeta\in[0.2\pi):\left|\frac{f\circ\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{f\circ\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}\right|\geq 1\right\}$$

上, 对方程 (2.1) 两边积分, 得到

$$m\left(r,\frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right)\leq S_1(r)+S_2(r), \tag{2.2}$$

其中

$$\begin{aligned}S_1(r)&=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{Re}\left(\frac{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}-\frac{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}\right)\right|\frac{d\theta}{2\pi}\frac{d\zeta}{2\pi}\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\mathrm{Re}\left(\frac{2(\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}))s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}))(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}))}\right)\right|\frac{d\theta}{2\pi}\frac{d\zeta}{2\pi}\end{aligned}$$

和

$$\begin{aligned}S_2(r)=&\sum_{|c_k|<s}\int_0^{2\pi}\log^+\left|1-\frac{\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-c_k}\right|\frac{d\zeta}{2\pi}+\sum_{|c_k|<s}\int_0^{2\pi}\log^+\left|1+\frac{\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{\frac{s^2}{\bar{c}_k}-\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}\right|\frac{d\zeta}{2\pi}\\&+\sum_{|c_k|<s}\int_0^{2\pi}\log^+\left|1+\frac{\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-c_k}\right|\frac{d\zeta}{2\pi}+\sum_{|c_k|<s}\int_0^{2\pi}\log^+\left|1-\frac{\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{\frac{s^2}{\bar{c}_k}-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}\right|\frac{d\zeta}{2\pi}.\end{aligned}$$

由三角不等式, 有

$$s-|\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})|\geq\frac{\alpha-1}{\alpha+1}s,\quad s-|\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})|\geq\frac{\alpha-1}{2}Cr^n.$$

因此, 选择充分大的 $r\,(\geq r_0>0)$, 使得 $\left|\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})\right|\leq\alpha(C+1)r^n$, 对 $S_1(r)$ 运用 Fubini 定理, 由引理 2.2 得到

$$\begin{aligned}S_1(r)&=\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\right|\int_0^{2\pi}\left|\mathrm{Re}\left(\frac{2(\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}))s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}))(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta}))}\right)\right|\frac{d\zeta}{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\\&\leq 8\alpha C^{\delta/n}r^\delta\cdot\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1-\delta/n}\int_0^{2\pi}\left|\log\left|f\left(s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\right|\right|\int_0^{2\pi}\frac{1}{|s\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})|^{\delta/n}}\frac{d\zeta}{2\pi}\frac{d\theta}{2\pi}\\&\leq\frac{8\alpha C^{\delta/n}}{1-\delta}\cdot\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1-\delta/n}\left(m(s,f)+m\left(s,\frac{1}{f}\right)\right)\\&\leq\frac{16\alpha C^{\delta/n}}{1-\delta}\cdot\frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1-\delta/n}\left(T(s,f)+\log^+\frac{1}{|f(0)|}\right).\end{aligned}\tag{2.3}$$

设 $p(z)$ 是一个首项系数为 d 的 n 次多项式. 注意到 $\log(1+|x|)\leq|x|$ 和 $r\geq r_0$, 由引理 2.2 计算出

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi}\log^+\left|1+\frac{\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{p(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}\right|\frac{d\zeta}{2\pi}&=\frac{n}{\delta}\int_0^{2\pi}\log^+\left|1+\frac{\omega(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})-\nu(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}{p(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})}\right|^{\delta/n}\frac{d\zeta}{2\pi}\\&\leq\frac{n}{\delta}(\alpha(C+1)r^n)^{\delta/n}\int_0^{2\pi}\frac{1}{|p(r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\zeta})|^{\delta/n}}\frac{d\zeta}{2\pi}\\&\leq\frac{n(\alpha(C+1))^{\delta/n}}{\delta(1-\delta)|d|^{\delta/n}}.\end{aligned}$$

因此

$$
\begin{aligned}
S_2(r) &\le \left(\frac{2n(\alpha(C+1))^{\delta/n}}{\delta(1-\delta)|a|^{\delta/n}} + \frac{2n(\alpha(C+1))^{\delta/n}}{\delta(1-\delta)}\right)\left(n(s,f) + n\left(s, \frac{1}{f}\right)\right) \\
&\le \frac{2n\alpha(C+1)^{\delta/n}}{\delta(1-\delta)} \cdot \frac{1+|a|^{\delta/n}}{|a|^{\delta/n}}\left(n(s,f) + n\left(s, \frac{1}{f}\right)\right). \qquad (2.4)
\end{aligned}
$$

从而, 由 (2.2)–(2.4), 推导出

$$
\begin{aligned}
m\left(r, \frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right) \le{}& \frac{16\alpha C^{\delta/n}}{1-\delta} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1-\delta/n}\left(T(s,f) + \log^+ \frac{1}{|f(0)|}\right) \\
&+ \frac{2n\alpha(C+1)^{\delta/n}}{\delta(1-\delta)} \cdot \frac{1+|a|^{\delta/n}}{|a|^{\delta/n}}\left(n(s,f) + n\left(s, \frac{1}{f}\right)\right). \qquad (2.5)
\end{aligned}
$$

选择充分大的 r_0, 使得对所有的 $r > r_0$,

$$
s = \frac{\alpha+1}{2}(Cr^n + |p_{n-1}|r^{n-1} + \cdots + |p_0|) \le \frac{\alpha(\alpha+1)}{2}Cr^n =: \rho.
$$

所以, 从 (2.5) 得到

$$
\begin{aligned}
m\left(r, \frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right) \le{}& \frac{16\alpha C^{\delta/n}}{1-\delta} \cdot \frac{\alpha+1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\alpha-1}\right)^{1-\delta/n}\left(T(\rho,f) + \log^+ \frac{1}{|f(0)|}\right) \\
&+ \frac{2n\alpha(C+1)^{\delta/n}}{\delta(1-\delta)} \cdot \frac{1+|a|^{\delta/n}}{|a|^{\delta/n}}\left(n(\rho,f) + n\left(\rho, \frac{1}{f}\right)\right).
\end{aligned}
$$

证毕.

引理 2.4 (见文 [1, 引理 5.2]) 假设 $T:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是一连续增函数, 满足

$$
\lim_{\gamma\to\infty} \frac{\log T(\gamma)}{\log \gamma} = 0,
$$

那么集合

$$
E := \{\gamma : T(C_1\gamma) \ge C_2 T(\gamma)\}
$$

的对数密度为 0, 其中 $C_1 > 1$ 和 $C_2 > 1$.

引理 2.5 (见文 [1, 引理 5.3]) 如果 $f(z)$ 是一非常数的零级亚纯函数, 那么对所有 $k \in \mathbb{N}$, 集合

$$
E_k := \left\{\gamma \ge 1 : n(\gamma, f) < \frac{T(\gamma, f)}{2^k}\right\}
$$

的对数密度为 1.

引理 2.6 (见文 [1, 引理 5.4]) 假设 $T:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ 是一连续增函数, $U:\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. 如果存在一递减序列 $\{c_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, 使得 $c_n \to 0$, $n \to \infty$, 且对所有 $k \in \mathbb{N}$, 集合

$$
F_k := \{\gamma \ge 1 : U(\gamma) < c_k T(\gamma)\}
$$

的对数密度为 1, 那么在对数密度为 1 的集合上

$$
U(\gamma) = o(T(\gamma)).
$$

下面给出定理 2.1 的证明.

证明　令 $K \geq K_0 = \frac{\alpha(\alpha+1)C}{2} \geq \alpha > 1$. 由引理 2.3 和 2.4, 对充分大的 r, 得到

$$\begin{aligned} m\left(r, \frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right) &\leq D_1\left(n(Kr^n, f) + n\left(Kr^n, \frac{1}{f}\right)\right) + \frac{D_2}{K}T(Kr^n, f) \\ &\leq 2D_1\left(n(r^n, f) + n\left(r^n, \frac{1}{f}\right)\right) + \frac{2D_2}{K}T(r^n, f) \end{aligned}$$

在对数密度为 1 的集合上成立, 其中 D_1, D_2 是与 r 无关的正常数.

现在, 选取充分大的 $k > k_0$, 使得 $K = 2^k \geq K_0$, 由引理 2.5 得到

$$m\left(r, \frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right) \leq \frac{4D_1 + 2D_2}{2^k}T(r^n, f)$$

在对数密度为 1 的集合上成立. 取

$$U(r^n) = m\left(r, \frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right).$$

从而, 由引理 2.6, 得到

$$m\left(r, \frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right) = o(T(r^n, f))$$

在对数密度为 1 的集合上成立. 证毕.

3　零级亚纯函数与多项式的复合函数的特征函数

张和 Korhonen 证明如下的零级亚纯函数 $f(z)$ 的特征函数的关系.

定理 3.1 (见文 [14, 定理 1.1])　设 $f(z)$ 是非常数的零级亚纯函数, $q \in \mathbb{C}\backslash\{0\}$. 那么

$$T(r, f(qz)) = T(r, f(z)) + S(r, f)$$

在下对数密度

$$\liminf_{r\to\infty} \int_{[1,r]\cap E_2} \frac{dt}{t} / \log r = 1$$

的集合上成立.

推广定理 3.1, 得到零级亚纯函数与多项式的复合函数的特征函数的性质.

定理 3.2　设 $\omega(z) = az^n + p_{n-1}z^{n-1} + \cdots + p_0$ 是非常数多项式, 其中 $|a| \neq 1$. 如果非常数亚纯函数 $f(z)$ 满足 $f(0) \neq 0, \infty$ 和

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log T(r, f)}{\log r} = 0,$$

那么

$$T(r, f\circ\omega) = (1 + o(1))T(r^n, f) \tag{3.1}$$

在对数密度为 1 的集合上成立.

证明　假设 $\nu(z) = z^n$. 因为 $|a| \neq 1$, 分两种情形讨论.

若 $|a| > 1$. 由引理 2.4 计算出

$$N(r^n, f) \leq \beta N(|a|r^n + \cdots + |p_0|, f) = \beta T((1 + o(1))|a|r^n, f)$$

在对数密度为 0 的集合上成立, 其中 $\beta \in (0,1)$. 从而

$$N(|a|r^n + \cdots + |p_0|, f) = (1+o(1))N(r^n, f) \tag{3.2}$$

在对数密度为 1 的集合上成立.

由定理 2.1, 得到

$$\begin{aligned} T(r, f\circ\omega) &= N(r, f\circ\omega) + m(r, f\circ\omega) \\ &\le N(r, f\circ\omega) + m(r, f\circ\nu) + m\left(r, \frac{f\circ\omega}{f\circ\nu}\right) \\ &\le N(|a|r^n + \cdots + |p_0|, f) + m(r^n, f) + o(T(r^n, f)) \end{aligned} \tag{3.3}$$

在对数密度为 1 的集合上成立.

因此, 由 (3.2) 和 (3.3), 有

$$T(r, f\circ\omega) \le (1+o(1))T(r^n, f) \tag{3.4}$$

在对数密度为 1 的集合上成立.

另一方面, 对所有的 $r>0$,

$$T(r^n, f) \le T(|a|r^n + \cdots + |p_0|, f) = (1+o(1))T(r, f\circ\omega). \tag{3.5}$$

所以, 当 $|a|>1$, 由 (3.4) 和 (3.5) 可知 (3.1) 成立.

若 $|a|<1$. 因为对任意亚纯函数 $f(z)$ 和任意常数 $q\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$ (见文 [2, 第 2 页]),

$$N(r, f(qz)) = N(|q|r, f) + O(1),$$

所以有

$$\begin{aligned} N(r, f\circ\nu) = N(r^n, f) &= N\left(|a|r^n\cdot\frac{1}{|a|}, f\right) = N\left(|a|r^n, f\left(\frac{z}{|a|}\right)\right) \\ &= (1+o(1))N(|a|r^n, f) = (1+o(1))N(r, f(az^n)) \le (1+o(1))N(r, f\circ\omega). \end{aligned} \tag{3.6}$$

因此, 由定理 2.1 和 (3.6), 得到

$$\begin{aligned} T(r^n, f) = T(r, f\circ\nu) &= N(r, f\circ\nu) + m(r, f\circ\nu) \\ &\le N(r, f\circ\nu) + m(r, f\circ\omega) + m\left(r, \frac{f\circ\nu}{f\circ\omega}\right) \\ &\le (1+o(1))N(r, f\circ\omega) + m(r, f\circ\omega) + o(T(r^n, f)) \\ &= T(r, f\circ\omega) + o(T(r^n, f)) \end{aligned} \tag{3.7}$$

在对数密度为 1 的集合上成立.

另一方面, 对所有的 $r>0$,

$$T(r, f\circ\omega) \le T(|a|r^n + \cdots + |p_0|, f) \le T(r^n, f). \tag{3.8}$$

所以, 当 $|a|<1$, 由 (3.7) 和 (3.8) 可知 (3.1) 成立.

综合上述两种情形可知, (3.1) 成立. 证毕.

注 3.3 由定理 3.2 可知, 对于任何非常数的零级亚纯函数 $f(z)$ 和首项系数不同的 n 次多项式 $\omega(z)$ 和 $\varphi(z)$, 在对数密度为 1 的集合上, 有 $T(r, f\circ\omega) \sim T(r, f\circ\varphi)$ $(r\to\infty)$.

4 零级亚纯函数与多项式的复合函数的第二基本定理

Nevanlinna 第二基本定理 [12] 是 Picard 定理的推广. Halburt 等人 (见文 [5, 定理 2.4]) 研究了有限级亚纯函数的第二基本定理的差分模拟, Korhonen (见文 [10, 定理 4.1]) 证明了超级小于 1 的亚纯函数与多项式复合函数的第二基本定理, Barnett 等人 (见文 [1, 定理 3.1]) 谈论了零级亚纯函数的第二基本定理的 q- 差分模拟.

下面研究于零级亚纯函数与多项式的复合函数的第二基本定理.

定理 4.1 设 $\omega(z)=az^n+p_{n-1}z^{n-1}+\cdots+p_0$ 是非常数多项式, 其中 $|a|\neq 1$. 又设 $a_1,a_2,\ldots,a_q$ 是 q 个不同的常数. 如果非常数亚纯函数 $f(z)$ 满足 $f(0)\neq 0,\infty$ 和
$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log T(r,f)}{\log r}=0,$$
那么
$$m(r,f\circ\omega)+\sum_{k=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-a_k}\right)\le 2T(r,f\circ\omega)-N_\omega(r,f\circ\omega)+o(T(r,f\circ\omega))$$
在对数密度为 1 的集合上成立, 其中
$$N_\omega(r,f\circ\omega)=2N(r,f\circ\omega)-N(r,f\circ\omega-f\circ\nu)+N\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-f\circ\nu}\right).$$

证明 令
$$P(z)=\prod_{k=1}^{q}(z-a_k).$$
根据 Nevanlinna 第一基本定理和 Valiron–Mohon'ko 定理 (见文 [11, 定理 2.2.5]), 得到
$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{q}m\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-a_k}\right)&=\sum_{k=1}^{q}T\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-a_k}\right)-\sum_{k=1}^{q}N\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-a_k}\right)\\&=qT(r,f\circ\omega)-N\left(r,\frac{1}{P\circ f\circ\omega}\right)+O(1)\\&=m\left(r,\frac{1}{P\circ f\circ\omega}\right)+O(1).\end{aligned}\tag{4.1}$$

通过部分分式计算, 存在 q 个与 $a_1,a_2,\ldots,a_q$ 有关的常数 $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_q$, 使得
$$\frac{1}{P(z)}=\sum_{k=1}^{q}\frac{\alpha_k}{z-a_k}.$$

因此, 根据定理 2.1 和 Nevanlinna 第一基本定理, 有
$$\begin{aligned}m\left(r,\frac{1}{P\circ f\circ\omega}\right)&\le m\left(r,\frac{f\circ\omega-f\circ\nu}{P\circ f\circ\omega}\right)+m\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-f\circ\nu}\right)\\&\le m\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-f\circ\nu}\right)+o(T(r^n,f))\\&=T(r,f\circ\omega-f\circ\nu)-N\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-f\circ\nu}\right)+o(T(r^n,f))\\&\le m(r,f\circ\omega-f\circ\nu)+N(r,f\circ\omega-f\circ\nu)-N\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-f\circ\nu}\right)+o(T(r^n,f))\\&\le m(r,f\circ\omega)+N(r,f\circ\omega-f\circ\nu)-N\left(r,\frac{1}{f\circ\omega-f\circ\nu}\right)+o(T(r^nf))\end{aligned}\tag{4.2}$$

在对数密度为 1 的集合上成立.

从而, 由 (4.1) 和 (4.2), 可以得到

$$\begin{aligned} m(r, f\circ\omega) + \sum_{k=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f\circ\omega - a_k}\right) &\le 2m(r, f\circ\omega) + N(r, f\circ\omega - f\circ\nu) \\ &\quad - N\left(r, \frac{1}{f\circ\omega - f\circ\nu}\right) + o(T(r^n, f)) \\ &= 2T(r, f\circ\omega) - 2N(r, f\circ\omega) + N(r, f\circ\omega - f\circ\nu) \\ &\quad - N\left(r, \frac{1}{f\circ\omega - f\circ\nu}\right) + o(T(r^n, f)) \end{aligned} \tag{4.3}$$

在对数密度为 1 的集合上成立.

定理 3.2 指出 $T(r^n, f) = (1+o(1))T(r, f\circ\omega)$ 在对数密度为 1 的集合上成立. 所以 (4.3) 可以化为

$$\begin{aligned} m(r, f\circ\omega) + \sum_{k=1}^{q} m\left(r, \frac{1}{f\circ\omega - a_k}\right) &\le 2T(r, f\circ\omega) - 2N(r, f\circ\omega) + N(r, f\circ\omega - f\circ\nu) \\ &\quad - N\left(r, \frac{1}{f\circ\omega - f\circ\nu}\right) + o(T(r, f\circ\omega)) \end{aligned}$$

在对数密度为 1 的集合上成立. 证毕.

致谢 感谢审稿人提出宝贵的修改意见.

参 考 文 献

[1] Barnett D. C., Halburd R. G., Morgan W., et al., Nevanlinna theory for the q-difference operator and meromorphic solutions of q-difference equations, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A*, 2007, **137**(3): 457–474.

[2] Bergweiler W., Ishizaki K., Yanagihara N., Meromorphic solutions of some functional equations, *Methods Appl. Anal.*, 1998, **5**(3): 248–258; Correction: *Methods Appl. Anal.*, 1999, **6**(4): 617–618.

[3] Chiang Y. M., Feng S. J., On the Nevanlinna characteristic of $f(z+\eta)$ and difference equations in the complex plane, *Ramanujan J.*, 2008, **16**(1): 105–129.

[4] Gromak V., Laine I., Shimomura S., Painlevé Differential Equations in the Complex Plane, Walter de Gruyter, Berlin, New York, 2002.

[5] Halburt R. G., Korhonen R. J., Nevanlinna theory for the difference operator, *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 2006, **31**(2): 463–478.

[6] Halburd R. G., Korhonen R. J., Difference analogue of the lemma on the logarithmic derivative with applications to difference equations, *J. Math. Anal. Appl.*, 2006, **314**(2): 477–487.

[7] Halburd R. G., Korhonen R. J., Tohge K., Holomorphic curves with shift invariant hyperplane preimages, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 2014, **366**(8): 4267–4298.

[8] Hayman W. K., Meromorphic Functions, Clarendon Press, Oxford, 1964.

[9] Hille E., Ordinary Differential Equations in the Complex Domain, Dover Publications, Inc., Mineola, NY, 1997.

[10] Korhonen R., An extension of Picard's theorem for meromorphic functions of small hyper-order, *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **357**(1): 244–253.

[11] Laine I., Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations, Walter de Gruyter, Berlin, 1993.

[12] Nevanlinna R., Zur theorie der meromorphen funktionen (German), *Acta Math.*, 1925, **46**(1–2): 1–99.

[13] Yang C. C., Yi H. X., Uniqueness Theory of Meromorphic Functions, Kluwer, Dordrecht, 2003.

[14] Zhang J. L., Korhonen R., On the Nevanlinna characteristic of $f(qz)$ and its application, *J. Math. Anal. Appl.*, 2010, **369**(2): 537–544.