2006,**26A**(5):671–674

Acta Mathematica Scientia
数学物理学报

亚纯函数的因子分解 *

黄志波　孙道椿
(华南师范大学数学系　广州 510631)

摘要：该文研究复合意义下的亚纯函数的因子分解，完善文献 [1] 中定理 1 的证明，得出判断某些函数为拟素的或 E - 拟素的必要条件.

关键词：超越亚纯函数；整函数；拟素的；聚结线；聚点；级.

MR(2000) 主题分类：30B50　**中图分类号**：O174.52　**文献标识码**：A

文章编号：1003-3998(2006)05-671-04

1 引言

定义 1　设 $F(z)$ 为一亚纯函数，若不存在超越亚纯函数 f 与超越整函数 g, 使 $F(z)=f\circ g(z)$, 则称 $F(z)$ 是拟素的.

定义 2　设 $F(z)$ 为一整函数，若不存在超越整函数 f 与 g, 使 $F(z)=f\circ g(z)$, 则称 $F(z)$ 是 E - 拟素的.

定义 3　设 $E\subset C$ 为一复数集合，若 $\theta\in[0,2\pi)$ 是一实数集合 $\{\arg z|z\in E\}$ 的一个聚点，则称半直线 $\arg z=\theta$ 为集合 E 的聚结线.

定义 4　设不恒为零的整函数 $F(z)$ 的零点 $\{z_v\}_{v=1}^{\infty}$ 满足

$$0<|z_1|\le|z_2|\le\cdots\le|z_v|\le\cdots,\tag{1}$$

p 是使级数 $\sum\limits_{v=1}^{+\infty}\frac{1}{|z_v|^{p+1}}$ 收敛的最小正整数，则 $F(z)$ 可分解为

$$F(z)=\mathrm{e}^{g(z)}\cdot P(z),$$

其中 $g(z)$ 为一多项式.

$$P(z)=\prod_{v=1}^{+\infty}(1-\frac{z}{z_v})^{\frac{z}{z_v}+\frac{1}{2}(\frac{z}{z_v})^2+\cdots+\frac{1}{p}(\frac{z}{z_v})^p},$$

则称 $P(z)$ 为 $F(z)$ 的零点的典型乘积，整数 p 称为典型乘积的亏格.

在文献 [2] 中， Albert Edrei 证明了

收稿日期：2004-12-07; 修订日期：2006-04-10

E-mail: hzbo20019@sina.com; sundc@scnu.edu.cn

* 基金项目：国家自然科学基金 (10471048), 广东省自然科学基金 (04010474) 和高等学校博士学科专项科点研基金 (20050574002) 资助

定理 A 设 $F(z)$ 是一整函数，若存在无穷复数序列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使方程 $f(z)=w_n$ $(n=1,2,\cdots)$ 的根均为实数，则 $F(z)$ 是一个次数不超过 2 的多项式.

之后，乔建永在文献 [1] 中推广了定理 A 的结论，获得

定理 B 设 $F(z)$ 为有限级整函数，若存在无界复数序列 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$, 使得 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{z|F(z)=w_n\}$ 仅有有限条聚结线，则 $F(z)$ 为多项式.

但文献 [1] 的证明中，若 $z=0$ 为 $F(z)$ 的 $\mu(\geq 1)$ 级零点的情形没有讨论. 作者完善其证明，并利用定理 A 、定理 B, 获得如下结论.

定理 1 设 $F(z)$ 为有限级超越亚纯函数，且其零点均为实数，则 $F(z)$ 必为拟素的.

定理 2 设 $F(z)$ 为有限级整函数，若存在一个复数 a, 使 $F(z)-a$ 的零点仅有有限条聚结线，则 $F(z)$ 必为 E - 拟素的.

2 引理

引理 2.1 设 $a_1,a_2,\cdots,a_K$ 是 $[0,2\pi)$ 中 K 个不同的元素, 对 $\theta\in[-\pi,\pi)$. 若 $\theta^*\equiv\theta$ (mod 2π), 则存在一个单调增加的正整数序列 $\{n_q\}$, 使 $(n_q a_j)^*\in(-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6})$, 其中 $1\leq j\leq K, q=1,2,\cdots$.

引理 2.2 对 $[0,2\pi)$ 中的 l 个不同的实数 θ_k $(k=1,2,\cdots,l)$, 任取 $M>0$, 存在正整数 $m>M$, 使得 $\cos(m\theta_k)>\frac{\sqrt{3}}{2}$.

引理 2.3 设 $F(z)$ 是有限 ρ 级整函数，其零点 $\{z_v\}_{v=1}^{\infty}$ 满足条件 (1), 则当 $l>\rho$ 时有

$$\frac{1}{l!}\Big(\frac{F'(z)}{F(z)}\Big)^{(l)}|_{z=0}=-\sum_{v=1}^{\infty}\frac{1}{z^{l+1}}.$$

引理 2.4 (Pólya) 设 $f(z)$ 与 $g(z)$ 为二个非常数的整函数，使函数 $F(z)=f\circ g(z)$ 的级为有穷，则或者 $g(z)$ 是一个多项式，或者 $f(z)$ 的级为零.

3 定理 B 的证明

设 $F(z)$ 的级为 ρ. 下面分两种情形讨论.

情形 1 若 $F(z)$ 的零点 $\{z_v\}_{v=1}^{\infty}$ 满足条件 (1), 则由文献 [3] 知

$$F(z)=\mathrm{e}^{g(z)}\prod_{v=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z}{z_v}\Big)^{Q_p(z/z_v)},$$

其中 $g(z)$ 是一个次数不超过 ρ 的多项式， p 为 $F(z)$ 的零点所组成典型乘积的亏格且 $p\leq\rho$

$$Q_p(z/z_v)=\frac{z}{z_v}+\frac{1}{2}\Big(\frac{z}{z_v}\Big)^2+\cdots+\frac{1}{p}\Big(\frac{z}{z_v}\Big)^p.$$

情形 2 若 $F(z)$ 的零点除 $\{z_v\}_{v=1}^{\infty}$ 满足条件 (1) 外， $z=0$ 也是 $F(z)$ 的 μ 级零点，则由文献 [3] 知

$$F(z)=\mathrm{e}^{g(z)}z^{\mu}\prod_{v=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{z}{z_v}\Big)^{Q_p(z/z_v)},$$

其中 $g(z)$ 与 $Q_p(z/z_v)$ 如同情形 1 的规定.

于是，令 $G(z)=\mathrm{e}^{g(z)}\prod\limits_{v=1}^{+\infty}(1-\frac{z}{z_v})^{Q_p(z/z_v)}$. 则 $F(z)=z^{\mu}G(z)$ 且 $\{z_v\}_{v=1}^{\infty}$ 为 $G(z)$ 的零点. 从而可化为情形 1. 因而不失一般性，只讨论情形 1 就可以. 因为若情形 1 推出 $F(z)$ 为多项式，则情形 2 中 $G(z)$ 也为多项式， $F(z)=z^{\mu}G(z)$ 仍为多项式，且 $F(z)$ 的级仍为 ρ.

下面在情形 1 的条件下证明.

不妨设 $0<|w_1|<|w_2|<\cdots<|w_n|<\cdots$，否则考虑 $\{w_n\}$ 的子列 $\{w_{n_k^*}\}_{k=1}^{\infty}$. 设 $F(z)=w_n$ 的根为 $\{a_{n_k}\}$, $0<|a_{n_1}|\le|a_{n_2}|\le\cdots\le|a_{n_k}|\le\cdots$. 记 $E=\{a_{n_k}|n,k=1,2,\cdots\}$. 由定理 B 的条件， E 仅有有限条聚结线，记为

$$\arg z=\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l,\quad 0\le\theta_1\le\theta_2\le\cdots\le\theta_l<2\pi. \tag{2}$$

由引理 2.2, 存在 $m\in\mathbf{N}$ 且 $m>\rho$, 使

$$\cos(m\theta_k)>\frac{\sqrt{3}}{2}\quad(k=1,2,\cdots,l). \tag{3}$$

记 $E_1=\{a_{n_k}^m|n,k=1,2,\cdots\}$. 由 (2) 、 (3) 式及引理 2.1 知， E_1 至多有 l 条聚结线且全在角域 $G=\{z|-\frac{\pi}{6}<\arg z<\frac{\pi}{6}\}$ 内.

对上述 m, 若 $F^{(m)}(z)\equiv0$, 则 $F(z)$ 为多项式. 若存在 $c\ne\infty$ 使 $F^{(m)}(c)\ne0$. 令 $g(z)=F(z+c)$, 则 $g(z)$ 的级仍为 ρ. $g^{(m)}(0)=F^{(m)}(c)\ne0$ 且 $g(z)=w_n$ 的根为 $\{c_{n_k}|c_{n_k}=a_{n_k}-c,n,k=1,2,\cdots\}$. 由上面的讨论，可设 $0<|c_{n_1}|\le|c_{n_2}|\le\cdots\le|c_{n_k}|\le\cdots$. 令 $E_2=\{c_{n_k}|n,k=1,2,\cdots\}$. 则 E_2 与 E 有完全相同的聚结线. 令 $E_3=\{c_{n_k}^m|n,k=1,2,\cdots\}$. 则 E_3 与 E_1 一样，至多有 l 条聚结线且全在角域 G (mod 2π) 内.

于是，对 $g(z)-w_n$ 应用引理 2.3 得

$$\left[\frac{g'(z)}{g(z)-w_n}\right]^{(m+q-1)}\Big|_{z=0}=-(m+q-1)!\sum_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-(m+q)},\quad q=1,2,\cdots.$$

令 $n\to\infty$, 得： $g^{(m+q)}(0)=(m+q-1)!\lim\limits_{n\to\infty}\left[w_n\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-(m+q)}\right]$. 故当 $q\ge1$ 时

$$\frac{g^{m+q}(0)}{g^{m}(0)}=\frac{(m+q-1)!}{(m-1)!}\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-(m+q)}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-m}}. \tag{4}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-(m+q)}\right|=\left|\sum_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-q}(c_{n_k})^{-m}\right|\le|c_{n_1}|^{-q}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n_k}|^{-m}, \tag{5}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-m}\right|\ge\left|\sum_{k=1}^{\infty}\mathrm{Re}(c_{n_k})^{-m}\right|>\left|\sum_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-m}\cos\frac{\pi}{6}\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\sum_{k=1}^{\infty}|c_{n_k}|^{-m}. \tag{6}$$

由 (4) 、 (5) 、 (6) 式有

$$\left|\frac{g^{(m+q)}(0)}{g^{(m)}(0)}\right|=\frac{(m+q-1)!}{(m-1)!}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-(m+q)}}{\sum\limits_{k=1}^{\infty}(c_{n_k})^{-m}}\right|\le\frac{(m+q-1)!}{(m-1)!}\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{3}|c_{n_1}|^{q}}. \tag{7}$$

又 $w_n\to\infty$, 而 $g(c_{n_1})=w_n$ 且 $g(z)$ 为整函数，则 $c_{n_1}\to\infty$. 于是，由 (7) 式，有 $g^{(m+q)}(0)=0,q=1,2,\cdots$. 故 $g(z)$ 为多项式. 从而 $F(z)$ 也为多项式.

4 定理 1 的证明

若定理的结论不真．则存在超越亚纯函数 $f(w)$ 与超越整函数 $g(z)$, 使 $F(z)=f\circ g(z)$. 而 $F(z)$ 的级有限，由引理 2.4, 则或者 $g(z)$ 为一多项式，或者 $f(w)$ 的级为零．

若 $g(z)$ 为一多项式，与 $g(z)$ 为超越整函数矛盾．从而 $f(w)$ 的级为零．又 $f(w)$ 至多只有一个极点．否则，设 a_1,a_2 为 $f(w)$ 的两个不同的极点．由 Picard 定理， $g(z)$ 至多有一例外值．则 $g(z)=a_1$ 或 $g(z)=a_2$. 不失一般性，设 $g(z)=a_1$. 那么 $f(w)$ 有无穷多个极点．与 $F(z)=f\circ g(z)$ 是整函数矛盾．故 $f(w)$ 具有形式 $f(w)=(w-w_0)^{-n}f_1(w)$, 其中 $n\in N, f_1(w)$ 为一整函数且 $f_1(0)\neq 0$. 同时 $g(z)=w_0+\mathrm{e}^{\alpha(z)}$, 其中 $\alpha(z)$ 为一整函数．于是 $F(z)=f\circ g(z)=\mathrm{e}^{-n\alpha(z)}f_1(w_0+\mathrm{e}^{\alpha(z)})$.

令 $\{a_v\}$ 表示 $f_1(w)$ 的零点的集合，则 $\{a_v\}$ 为一无界集合．又因 $F(z)$ 的根均为实数．故对任一个 $a_v, v=1,2,\cdots$, 方程 $g(z)=a_v$ 的根也为实数．从而，由定理 A 知， $g(z)$ 的是一个次数不超过 2 的多项式．与 $g(z)$ 为超越整函数矛盾．故 $F(z)$ 为拟素的．

推论 $F(z)=\cos z$ 为拟素的．

5 定理 2 的证明

假设 $F(z)$ 不是 E - 拟素的．则存在超越整函数 $f(w)$ 与 $g(z)$, 使 $F(z)=f\circ g(z)$. 由定理 B 知， $f(w)=a$ 只有有限个根．否则，设 $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $f(w)=a$ 的无穷多个根．由条件知， $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{z|g(z)=w_n\}$ 仅有有限条聚结线．再由定理 B 知， $g(z)$ 为一多项式，矛盾．从而，由 Weierstrass 定理有 $f(w)-a=H(w)\mathrm{e}^{L(w)}$, 其中 $H(w)$ 为一多项式， $L(w)$ 为一非常数的整函数．因而 $F(z)-a=f\circ g(z)-a=[H(w)\mathrm{e}^{L(w)}]\circ g(z)$.

由引理 2.3 知， $F(z)$ 的级必为无穷．与 $F(z)$ 的级为有限矛盾．

参 考 文 献

[1] 乔建永．亚纯函数的因子分解．数学年刊， 1989, **10A**(6): 692–698

[2] Albert Edrei.Meromorphic function with three radially distributted values. Trans Amer Math Soc, 1955, **78**: 276–293

[3] 柏盛桄．整函数与亚纯函数．武汉：华中师范大学出版社， 1987.

[4] 庄圻泰，杨重骏．亚纯函数的不动点与分解论．北京：北京大学出版社， 1986

[5] Joseph Miles.On entire functions of infitine order with radially distributed zeros. Pacific J Math, 1979, **81**(1): 131–156

On the Factorization of Meromorphic Functions

Huang Zhibo Sun Daochun

(*Department of Mathematics, South China Normal University, Guanzhou 510631*)

Abstract: In this paper, the authors study the factorization of meromorphic functions under the condition of composition of functions, obtain a perfect proof of the Theorem 1 in [1] and the necessary conditions of some pseudo-prime or E-pseudo-prime functions.

Key words: Transcendental meromorphic founction; Entire founction; Pseudo-prime; Aggregation line; Cluster point; Order.

MR(2000) Subject Classification: 30D35